

文章编号: 1001-0920(2001)03-287-04

## 关于BP网络变结构问题的研究

郝培锋<sup>1</sup>, 肖文栋<sup>1</sup>, 祝钢<sup>2</sup>, 徐心和<sup>1</sup>

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004)

**摘要:** BP神经网络的收敛性涉及诸如网络初始权重赋值、隐结点个数以及隐层个数等问题。通过对BP神经网络隐结点个数的讨论, 以及对BP神经网络训练样本空间的研究, 得出一个重要结论, 即网络结构可以随训练样本空间进行变换, 从而使BP神经网络能够进行结构化简。

**关键词:** BP神经网络; 变结构; 阈值; 隐层

**中图分类号:** O 235 **文献标识码:** A

### Study on Variou Architecheture of a BP Neural Network

HAO Pei-feng<sup>1</sup>, XIAO Wen-dong<sup>1</sup>, ZHU Gang<sup>2</sup>, XU Xin-he<sup>1</sup>

(1. School of Infomation Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** With discussion on problems of the hidden layer nodes number, the training sample space matrix in training processes, etc. It is shown that it is the sample space that determines the topology connections of the neural network, i.e. the architecture of a BP neural network can be simplified along with its training sample space.

**Key words:** BP neural network; variou architecture; threshold; hidden layer

## 1 引言

近年来, 对神经网络的隐结点个数和样本空间的研究受到普遍关注<sup>[1-3]</sup>。在神经网络问题中, 除学习算法外, 网络的拓扑结构(即隐层结点数)和网络的初始权重也是决定网络训练的收敛速度和收敛性的重要因素。对于隐层结点数决定方法的研究已取得了一些进展<sup>[4]</sup>, 但网络初始权重的研究还存在不少问题, 主要是如何避免训练过程陷入局部极小, 以及如何增加网络训练的收敛速度。

传统的观念认为, BP网络隐层结点数的增加将会提高网络的收敛性。文献[4]的研究表明, 在这种

情况下, 网络将出现“过适应”状态, 即隐结点个数较多的网络对于训练样本产生的输出误差较小, 但对检测样本而言输出误差却有所增加。文献[5]讨论了作为分类器的BP网络的隐层结点上、下界问题: 假设BP网络的样本空间包括 $k$ 个样本, 需要 $n_1$ 个超平面把样本空间划分成 $d$ 个区域, 每个区域需要一个隐结点控制, 则该网络需要 $n_1$ 个隐层结点, 且满足 $n_1 = k - 1$ , 其中 $n_1$ 是隐层结点的上限。另外, 假设上述超平面相交且网络只有一个隐层, 则隐结点个数的下限等于这些独立区域的个数<sup>[5]</sup>。

收稿日期: 1999-11-04; 修回日期: 2000-03-28

基金项目: 辽宁省自然科学基金项目(962171)

作者简介: 郝培锋(1963—), 男, 河南汤阴人, 教授, 博士, 从事组合数学、计算机仿真等研究; 徐心和(1940—), 男, 河北山海关人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、机器人学和离散系统等研究。

$$n_2 = \min [P(n_1, n)] = \min \left[ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \right] \quad k \quad (1)$$

其中,  $n$  是样本的维数,  $k$  是样本的个数。

对于一个较简单的样本空间, 如果属于同一个目标值的所有样本的区域是连通的, 则该网络隐结点的个数等于目标值的个数<sup>[1]</sup>。若属于某个目标值的样本区域是不连通的, 则根据一个隐结点可以控制一个样本区域的结论, 网络的隐结点数应为  $\sum S_i$ , 其中  $S_i$  是第  $i$  个目标值具有的样本区域数。当目标值个数较多时, 样本空间的结构可能很复杂, 这时很难用这种方法确定网络的隐结点数。

本文对BP神经网络隐结点的个数进行讨论, 通过对网络训练样本空间的研究, 对网络结构进行变换, 由此得出了BP神经网络可以进行结构化简的重要结论。

## 2 BP网络变结构问题

文献[6]在初始化权重求解中, 利用矩阵求逆的方法确定了网络隐层-输出层的初始权重。若不单纯将这一过程看成权重的确定问题, 而认为是求解矩阵方程

$$V f_1(WX - B_1) = f_2^{-1}(Y - \Delta E) + B_2 \quad (2)$$

其中,  $V$  是未知矩阵,  $f_1(WX - B_1)$  是系数矩阵,  $f_2^{-1}(Y - \Delta E) + B_2$  可认为是常数矩阵。则问题可归结为方程(2)是否有解。根据矩阵理论, 方程(2)有解的充要条件是

$$\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} f_1(WX - B_1) \\ f_2^{-1}(Y - \Delta E) + B_2 \end{matrix} \right\}}{\partial f_1(WX - B_1)} = \Delta(f_1(WX - B_1)) \quad (3)$$

其中,  $\Delta E$  是为防止  $Y$  中的元素出现 0 和 1 而设置的误差量, 可以忽略;  $B_2$  是第 3 层结点的阈值。所以  $f_2(Y - \Delta E) + B_2$  可以写成  $f_2(Y + B_2)$ , 而  $f_2(Y +$

$$\tilde{W}X = X_0 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & a_{1(k+2)} & \dots & a_{1r} & 0 & a_{1(r+2)} & \dots & a_{1s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{1(k+2)} & \dots & a_{2r} & 0 & a_{2(r+2)} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{t(r+2)} & \dots & a_{ts} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \end{bmatrix}_{m \times s} \quad (9)$$

其中,  $t$  是样本空间矩阵  $X$  的秩, 矩阵  $\tilde{W}$  和  $X_0$  唯一存在。由上式得

$$X = \tilde{W}^{-1}X_0 \quad (10)$$

所以

$$WX = W\tilde{W}^{-1}X_0 = (W\tilde{W}^{-1})X_0 \quad (11)$$

$B_2)$  可以做一次变换, 即变为  $f_1(f_1^{-1}f_2(Y + B_2))$ 。于是上述充要条件为

$$\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} f_1(WX - B_1) \\ f_1(f_1^{-1}f_2(Y + B_2)) \end{matrix} \right\}}{\partial f_1(WX - B_1)} = \Delta(f_1(WX - B_1)) \quad (4)$$

这里网络的函数可以分为两种情况: 一种是取  $f_1 = f_2$  (即隐层和输出层函数均为非线性 Sigmoid 函数); 另一种是  $f_2$  为线性函数。具体分析如下:

1) 若  $f_1 = f_2$ , 则式(4)变为

$$\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} f_1(WX - B_1) \\ f_1(Y + B_2) \end{matrix} \right\}}{\partial f_1(WX - B_1)} = \Delta(f_1(WX - B_1)) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} WX \\ Y + B \end{matrix} \right\}}{\partial f_1(WX - B_1)} = \Delta(f_1(WX - B_1)) \quad (6)$$

其中  $B = \begin{bmatrix} -B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$

对于  $WX$ , 可认为是对  $X$  进行的一系列行变换。因此, 只要找到合适的矩阵  $W$  和  $B$ , 使式(4)成立即可。

2) 若  $f_2$  为线性(恒等)函数, 即  $f_2(x) = x$ , 则式(4)变为

$$\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} f_1(WX - B_1) \\ f_1[f_1^{-1}(Y + B_2)] \end{matrix} \right\}}{\partial f_1(WX - B_1)} = \Delta(f_1(WX - B_1)) \quad (7)$$

对于式(7)中矩阵及其乘积的讨论较为复杂。下面主要对样本空间矩阵  $X$  在网络训练中是否影响网络及其结构进行研究。

## 3 4层神经网络及其相关的3层神经网络

对于网络表达式

$$f_2(Vf_1(WX - B_1) - B_2) = Y - \Delta E \quad (8)$$

考察其中的  $WX$ 。  $X$  为一训练用样本空间矩阵, 总存在一个可逆的  $m \times m$  阶的方阵  $\tilde{W}$ , 使得

由此推出如下定理:

**定理 1** 由上述定义的样本空间  $X$  训练后网络的映射关系, 与由样本空间  $X_0$  训练的网络和矩阵  $\tilde{W}$  合成的网络所成的映射关系是等价的。

**证明** 由原样本空间所训练的网络满足如下



映射关系

$$f_2(Vf_1(WX - B_1) - B_2) = Y - \Delta E$$

对  $X$  进行矩阵变换, 得

$$f_2\{Vf_1[W(\tilde{W}^{-1}X_0) - B_1] - B_2\} = Y - \Delta E$$

即

$$f_2\{Vf_1[(W\tilde{W}^{-1})X_0 - B_1] - B_2\} = Y - \Delta E$$

上式表明,  $X_0$  满足与  $X$  网络相差一个权值矩阵的映射关系。即由  $X_0$  训练的网络中, 如果在网络输入的前面添加一个新输入层, 使原输入层变为整个网络的第二层, 而输入层到第二层间的网络权重矩阵为  $\tilde{W}$ , 则样本空间  $X$  满足这个新的网络映射关系。

$X$  和  $X_0$  满足的神经网络结构如图 1 所示。(证毕)

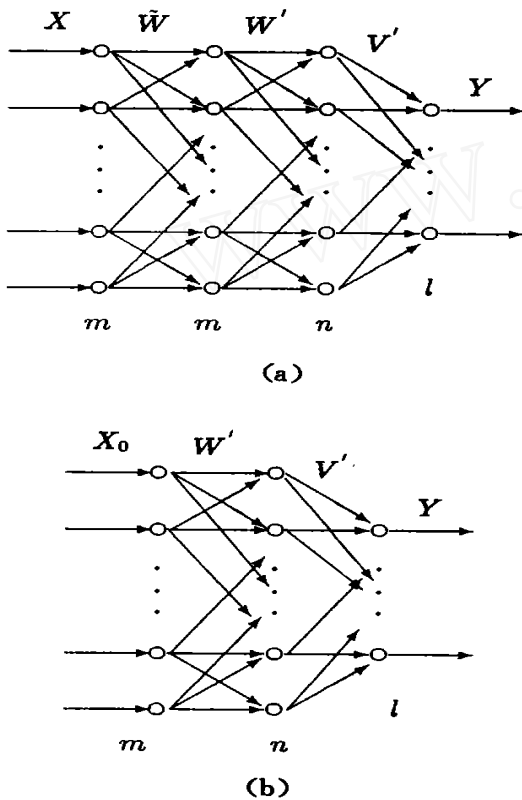


图 1  $X$  满足由  $X_0$  训练的神经网络结构

(a)  $X$  满足的 4 层神经网络

(b) 由  $X_0$  训练的 3 层神经网络

观察图 1(a) 中的第一个隐层, 由于  $\tilde{W}X = X_0$  的后  $m - r$  个维向量值为零, 说明网络计算中没有这  $m - r$  维的计算信息。样本空间  $X$  的每个样本经过网络第一个隐层权重  $\tilde{W}$  的变换都将变为零(新增这层的功能函数是线性的, 且结点的阈值为零), 这是该样本空间中所有样本的共同特征。显然, 这  $m$

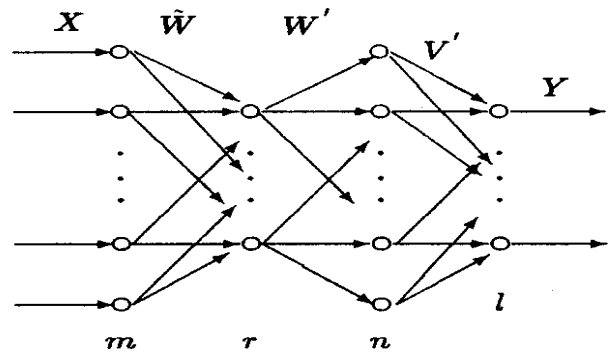


图 2 隐层中去掉零维结点的神经网络

$- r$  个零维对网络后面的隐层计算不起作用, 所以图 1(a) 中的网络可转变为图 2 所示的网络。变换后的网络具有滤掉每个样本中多余信息的功能。

需要指出的是, 如果网络处理的不是参加网络训练的样本, 而是其它向量, 如检测样本, 那么对于这些样本而言, 网络中去掉隐结点也不会丢掉有用的信息。因为在网络训练中, 与零输入维连接的权值不随训练过程变换或调整, 即与训练过程无关(当然也可以设置为零), 因此网络中的后  $m - r$  个输入维向量便可以去掉。

现在考虑 BP 训练过程中的权值调整问题。隐层 - 输出层权值为

$$v_{jk}(n_0 + 1) = v_{jk}(n_0) + \alpha \sum_{t=1}^s \delta_{jk} x_j^t \quad (12)$$

输入 - 隐层权值为

$$w_{ij}(n_0 + 1) = w_{ij}(n_0) + \alpha \sum_{t=1}^s \delta_{ij} x_{it} \quad (13)$$

其中

$$x_j^t = f_1 \left[ \sum_{i=1}^m w_{ij}(n_0) x_{it} - b_j \right]$$

$$\delta_k = (z_{tk} - y_{tk}) y_{tk} (1 - y_{tk})$$

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^l \delta_{jk} v_{jk} x_j^t (1 - x_j^t)$$

由式(13)知, 当输入样本的某个维向量值为零时, 与之相关联的权值便为零。由此得到如下定理:

**定理 2** 对于秩为  $r$  的训练样本空间矩阵  $X$ , 在用相关矩阵  $X_0$  训练网络的过程中, 与网络的后  $m - r$  个输入结点关联的结点之间权重的调整是随机的。

**证明** 由于训练用样本空间  $X_0$  中所有向量的后  $m - r$  个维向量值均为零, 由式(13)得

$$w_{ij}(n_0 + 1) = 0, \quad i = m - r \quad (14)$$

即在  $w_{ij}(n_0 + 1)$  中, 当  $i = m - r$  时, 权值  $w_{ij}(n_0 + 1)$  将不随训练过程而调整, 始终保持初始随机值。

所以与网络中后  $m - r$  个输入结点相关的结点之间权值的调整是随机的。(证毕)

由此可得如下定理:

**定理3** 对于一给定的BP神经网络, 设其样本空间为  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ , 且样本空间矩阵  $X$  的秩为  $r$ , 则该神经网络与一个输入结点个数为  $r$  的BP神经网络是等价的。

### 参考文献:

- [1] Lodewyk F A, Wessels Etienne Barnard Avoiding false local minima by proper initialization of connections[J] IEEE Trans on Neural Networks, 1992, 3(6): 899-905
- [2] Jacques de Villiers, Etienne Barnard Backpropagation neural nets with one and two hidden layers[J] IEEE Trans on Neural Networks, 1992, 4(1): 136-141
- [3] Roberto Battiti Using mutual information for selecting features in supervised neural learning[J] IEEE Trans on Neural Networks, 1994, 5(4): 537-550
- [4] Sungzoon Cho, Yongjung Cho, Sungchul Yoon Reliable roll force prediction in cold mill using multiple neural networks[J] IEEE Trans on Neural Networks, 1997, 8(4): 874-882
- [5] Erol Gelenbe, Zhi-Hong Mao, Yan-Da Li Function approximation with spiked random networks[J] IEEE Trans on Neural Networks, 1999, 10(1): 3-8
- [6] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [7] Erol Gelenbe, Zhi-Hong Mao, Yan-Da Li Function approximation with spiked random networks[J] IEEE Trans on Neural Networks, 1999, 10(1): 3-8
- [8] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [9] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [10] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [11] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [12] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [13] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [14] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [15] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [16] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [17] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [18] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [19] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [20] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [21] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [22] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [23] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [24] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [25] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [26] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [27] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [28] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [29] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [30] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [31] Hao Peifeng, Xu Xinhe The number of hidden nodes and the initial weights of BP neural network[A] Proc of '96 Int Conf on High & New Technology and Traditional Industry[C] Dandong, 1996
- [32] Lucy Y Pao. An analysis of the total insensitivity of input shaping designs[A] Proc of the AIAA Guid, Navig & Conf[C] San Diego, 1996
- [33] A D Christian, W P Seering Initial experiments with a flexible robot[A] Proc of the IEEE Int Conf on Rob & Autom [C] Cincinnati, 1990 722-727.
- [34] D P Magee, W J Book Filtering micro-manipulator wrist commands to prevent flexible base motion[A] Proc of the ACC[C] Seattle, 1995 924-928
- [35] T D Tuttle, W P Seering An experimental verification of vibration reduction in flexible spacecraft using input shaping[J] J of Guid, Contr & Dyn, 1997.
- [36] T Singh, S R Vadali Input-shaped control of three-dimensional maneuvers of flexible spacecraft[A] Proc of the AIAA Guid, Nav & Contr Conf[C] Hilton Head, 1992
- [37] W Singhose, N Singer, W Seering Improving repeatability of coordinate measuring machines with shaped command signals[J] Prec Eng, 1996, 18(4): 138-146
- [38] W E Singhose, L J Porter, W P Seering Input shaped control of a planar gantry crane with hoisting[A] Proc of the ACC[C] Albuquerque, 1997.
- [39] J Feddema, C Dohmann, G Parker A comparison of maneuver optimization and input shaping filters for robotically controlled slosh-free motion of an open container of liquid[A] Proc of the ACC [C] Albuquerque, 1997. 1345-1349
- [40] Kazuhiko T, Masafumi H, Kazuto Y. Modeling and input shaping control of liquid vibration for automatic pouring system[A] Proc of the IEEE Conf on Dec and Contr[C] Toyohashi, 1996, 4844-4850
- [41] 钟庆昌, 谢剑英 基于输入整形的时滞系统最小拍控制[J] 控制与决策, 2000, 15(2): 230-232

(上接第 268 页)