第 16 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2001 年 7 月
Vol.16 No.4 CONTROL AND DECISION July 2001

文章编号: 1001-0920(2001)04-0439-04

一类不确定线性时滞系统的输出反馈鲁棒镇定

郑连伟, 刘晓平, 黄公胜
(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 研究一类不确定线性时滞系统的输出反馈鲁棒镇定问题, 其中不确定性不必满足匹配条件。以二次 Lyapunov 泛函保证系统的渐近稳定性, 利用线性矩阵不等式给出了系统可以利用动态输出反馈鲁棒镇定的充分条件。当此条件成立时, 基于线性矩阵不等式的解构造了全阶动态输出反馈镇定控制器。

关键词: 不确定线性时滞系统; 鲁棒镇定; 动态输出反馈; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP 13 文献标识码: A

Output Feedback Robust Stabilization for a Class of Uncertain Linear Time-delay Systems

ZHENG Lian-wei, LIU Xiao-ping, HUANG Gong-sheng
(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The problem of output feedback robust stabilization for a class of uncertain linear time-delay systems is studied. The uncertainties are not required to satisfy matching conditions. A quadratic Lyapunov functional is adopted to guarantee the asymptotic stability of the systems. Sufficient conditions for the robust stabilization via dynamic output feedback controllers are given in terms of linear matrix inequalities. When such conditions are satisfied, a robust dynamic output feedback controller is constructed based on the solutions of the linear matrix inequalities.

Key words: uncertain linear time-delay systems; robust stabilization; dynamic output feedback; linear matrix inequalities

1 引 言

时滞是控制系统的一种常见现象, 它会使系统的性能变坏, 甚至使系统变得不稳定。因此, 多年来时滞系统的研究受到了许多学者的关注。近年来, 许多文献研究了不确定线性时滞系统的鲁棒镇定问题, 得到了许多状态反馈鲁棒镇定的方法[1~3]。当系统的状态不能直接测得时, 这些方法的应用便受到了限制。因此, 研究输出反馈鲁棒镇定问题具有重要的实际意义。

最近, 文献[4]对于不确定性满足匹配条件的一类线性时滞系统, 利用 Riccati 方程给出了基于观测器的鲁棒镇定方法。本文针对一类不确定线性时滞系统, 利用线性矩阵不等式给出系统可以通过动态输出反馈鲁棒镇定的充分条件, 同时给出相应的动

收稿日期: 1999-12-09; 修回日期: 2000-03-24
基金项目: 国家自然科学基金项目(69974007); 教育部跨世纪优秀人才培养计划基金项目(199345)
作者简介: 郑连伟(1963—), 男, 辽宁新民人, 博士生, 从事鲁棒控制、H_∞控制等研究; 刘晓平(1962—), 男, 黑龙江双城人, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统、时滞系统等研究。

态输出反馈控制器设计方法,其中的不确定性不必满足匹配条件。

2　系统描述

考虑如下不确定线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)\times x(t-d) + (B+\Delta B)u(t) \tag{1a}$$

$$y(t) = (C+\Delta C)x(t) + (C_d + \Delta C_d)x(t-d) \tag{1b}$$

$$x(t) = \phi(t),\quad t\in[-d, 0] \tag{1c}$$

其中,$x(t)\in R^n$ 是状态,$u(t)\in R^m$ 是控制,$y(t)\in R^r$ 是输出,A, A_d, B, C, C_d 是具有适当维数的常数矩阵,$d>0$ 是状态时滞,$\phi(t)$ 是连续初始向量函数,$\Delta A, \Delta A_d, \Delta B, \Delta C, \Delta C_d$ 是具有适当维数的不确定性矩阵,它们是时变不确定参数 $\delta_1(t),\cdots,\delta_s(t)$ 的线性矩阵函数,例如

$$\Delta A = \delta_1(t)A_1 + \cdots + \delta_s(t)A_s$$

式中 $A_1,\cdots,A_s$ 是常数距阵。

假设不确定参数的上界和下界已知,即不确定参数向量 $\delta(t) = (\delta_1(t),\cdots,\delta_s(t))$ 在集合

$$\Omega = \{(\delta_1,\cdots,\delta_s)\in R^s: \underline{\delta}_i \le \delta_i \le \bar{\delta}_i\}$$

内取值。记 $\Omega_{vex} = \{(\delta_1,\cdots,\delta_s)\in R^s: \delta_i = \underline{\delta}_i$ 或 $\delta_i = \bar{\delta}_i\}$。

本文的目的是设计如下形式的输出反馈控制器

$$\begin{cases}\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t)\\ u(t) = C_c x_c(t)\end{cases} \tag{2}$$

使得它与式(1)构成的闭环系统

$$\dot{\xi}(t) = \bar{A}(\delta)\xi(t) + \bar{A}_d(\delta)\xi(t-d) \tag{3}$$

渐近稳定。其中

$$\xi(t) = [x^{\mathrm T}(t)\quad x_c^{\mathrm T}(t)]^{\mathrm T},\quad x_c(t)\in R^n$$

3　主要结果

首先给出一个引理,它是控制器设计的基础。

引理 1　如果存在正定矩阵 $P>0$ 和 $S>0$,使得对任意 $\delta\in\Omega_{vex}$,有

$$\begin{bmatrix} P\bar{A}(\delta) + \bar{A}^{\mathrm T}(\delta)P + S & P\bar{A}_d(\delta)\\ \bar{A}_d^{\mathrm T}(\delta)P & -S\end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

则系统(3)渐近稳定。

证明　取 Lyapunov 泛函

$$V(\xi_t) = \xi^{\mathrm T}(t)P\xi(t) + \int_{t-d}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)S\xi(s)\,\mathrm{d}s$$

容易证明存在 $\alpha>0$,使得对任意 $\delta\in\Omega$,有 $\dot{V}(\xi_t) < -\alpha\|\xi(t)\|^2$。由时滞系统的稳定性定理,得知系统(3)渐近稳定。(证毕)

定理 1　存在控制器(2)和正定矩阵 $P>0, S>0$,使得对任意 $\delta\in\Omega_{vex}$,式(4)成立,当且仅当存在正定矩阵 $X>0, Y>0, S_{11}>0, S_{22}>0$ 以及矩阵 U, V, Z, S_{12},使得对任意 $\delta\in\Omega_{vex}$,有

$$\begin{bmatrix}\Sigma_{11}+S_{11} & \Sigma_{12}+S_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14}X\\ \Sigma_{12}^{\mathrm T}+S_{12}^{\mathrm T} & \Sigma_{22}+S_{22} & A_d+\Delta A_d & (A_d+\Delta A_d)X\\ \Sigma_{13}^{\mathrm T} & (A_d+\Delta A_d)^{\mathrm T} & -S_{11} & -S_{12}\\ X\Sigma_{14}^{\mathrm T} & X(A_d+\Delta A_d)^{\mathrm T} & -S_{12}^{\mathrm T} & -S_{22}\end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

并且

$$\begin{bmatrix} Y & I\\ I & X\end{bmatrix} > 0 \tag{6}$$

其中

$$\Sigma_{11} = Y(A+\Delta A) + (A+\Delta A)^{\mathrm T}Y + V(C+\Delta C) + (C+\Delta C)^{\mathrm T}V^{\mathrm T}$$

$$\Sigma_{12} = Z + Y\Delta AX + Y\Delta BU + V\Delta CX + \Delta A^{\mathrm T}$$

$$\Sigma_{13} = Y(A_d+\Delta A_d) + V(C_d+\Delta C_d)$$

$$\Sigma_{14} = Y(A_d+\Delta A_d) + V(C_d+\Delta C_d)$$

$$\Sigma_{22} = (A+\Delta A)X + X(A+\Delta A)^{\mathrm T} + (B+\Delta B)U + U^{\mathrm T}(B+\Delta B)^{\mathrm T}$$

而且控制器的矩阵可以取为

$$\begin{cases} A_c = X(YX-I)^{-1}(YAX + YBU + VCX + A^{\mathrm T} - Z)X^{-1}\\ B_c = X(I-YX)^{-1}V,\quad C_c = UX^{-1}\end{cases} \tag{7}$$

证明　必要性:把矩阵(4)两边分别乘以矩阵 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\}$,并定义 $S_1 = P^{-1}SP^{-1}, Q = P^{-1}$,略去 δ 得

$$\begin{bmatrix}\bar{A}Q + Q\bar{A}^{\mathrm T} + S_1 & \bar{A}_dQ\\ Q\bar{A}_d^{\mathrm T} & -S_1\end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

把 Q 分块为 $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12}^{\mathrm T} & Q_{22}\end{bmatrix}$。不妨设 Q_{12} 是可逆的;否则对于充分小的正数 ϵ,用 $Q_{12}+\epsilon I$ 代替 Q_{12} 不影响 Q 的正定性和式(8)的成立。记 $T_1 = \mathrm{diag}\{I, Q_{12}^{-1}Q_{11}\}, T_2 = \mathrm{diag}\{T_1, T_1\}$。把式(8)中的矩阵左乘以 $T_2^{\mathrm T}$,右乘以 T_2,并定义 $\tilde{S} = T_1^{\mathrm T}S_1T_1$,以及

$$\tilde{Q} = T_1^{\mathrm T}QT_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{11}\\ Q_{11} & Q_{11}Q_{12}^{-\mathrm T}Q_{22}Q_{12}^{-1}Q_{11}\end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix}\bar{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\bar{A}^{\mathrm T} + \tilde{S} & \bar{A}_d\tilde{Q}\\ \tilde{Q}\bar{A}_d^{\mathrm T} & -\tilde{S}\end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

这里对控制器进行状态变换 $x_c = Q_{12}^{\mathrm T}Q_{11}^{-1}\hat{x}_c$。定义 $R = Q_{11}Q_{12}^{-\mathrm T}Q_{22}Q_{12}^{-1}Q_{11} - Q_{11}$, $X = Q_{11}$, 则 $\tilde{Q} =$

$\begin{bmatrix} X & X \\ X & X+R \end{bmatrix}$。令 $Y = R^{-1} + X^{-1}$, $T_3 = \begin{bmatrix} Y & -R^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $T_4 = \mathrm{diag}\{T_3, T_3\}$。把式(9) 中的矩阵左乘以 T_4, 右乘以 T_4^{T}, 并定义 $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22} \end{bmatrix} = T_3 \tilde{S} T_3^{\mathrm{T}}$, 以及

$$\begin{cases} U = C_c X, \quad V = -R^{-1}B_c \\ Z = YAX + YBU - R^{-1}A_c X + \\ \quad VCX + A^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{10}$$

则可得式(5)。从等式

$$\begin{bmatrix} X^{-1} - R^{-1} & I \\ R^{-1} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tilde{Q} \begin{bmatrix} X^{-1} - R^{-1} & I \\ R^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{-1} + R^{-1} & I \\ I & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix}$$

以及 $\tilde{Q} > 0$ 可知式(6) 成立。式(7) 可由式(10) 得到。必要性证完。

充分性: 把必要性的证明过程反过来可得充分性证明。(证毕)

因为集合 Ω_{vex} 含有 2^s 个元素, 式(5) 实际上是 2^s 个二次矩阵不等式, 但不是线性矩阵不等式。下面利用线性矩阵不等式给出它们有解的一个充分条件。为此, 把 ΔA, ΔB 和 ΔC 做如下分解

$$\Delta A = D_a E_a, \quad \Delta B = D_b E_b, \quad \Delta C = D_c E_c \tag{11}$$

其中的因子矩阵是具有适当维数的 δ 的线性矩阵函数或常数矩阵。这种分解总是可行的, 因为必要时某个因子矩阵可以取为单位矩阵。

定理 2　如果对于某种分解(11), 正数 $\epsilon_1 \sim \epsilon_4$, 正定矩阵 $X > 0$, $Y > 0$, $S_{11} > 0$ 以及矩阵 U, V, Z, 对任意 $\delta \in \Omega_{\mathrm{vex}}$, 都是下列线性矩阵不等式的解, 则它们与 $S_{22} = \epsilon_4 X^2$, $S_{12} = 0$ 对任意 $\delta \in \Omega_{\mathrm{vex}}$, 都是式(5) 的解。

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^{\mathrm{T}} & -\Psi_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

其中

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} + S_{11} & Z + \Delta A^{\mathrm{T}} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ Z^{\mathrm{T}} + \Delta A & \Sigma_{22} & A_d + \Delta A_d & A_d + \Delta A_d \\ \Sigma_{13}^{\mathrm{T}} & (A_d + \Delta A_d)^{\mathrm{T}} & -S_{11} & 0 \\ \Sigma_{14}^{\mathrm{T}} & (A_d + \Delta A_d)^{\mathrm{T}} & 0 & -\epsilon_4 I \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{12} = \begin{bmatrix} YD_a & YD_b & VD_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & XE_a^{\mathrm{T}} & U^{\mathrm{T}}E_b^{\mathrm{T}} & XE_c^{\mathrm{T}} & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{22} = \mathrm{diag}\{\epsilon_1^{-1}I, \epsilon_2^{-1}I, \epsilon_3^{-1}I, \epsilon_1 I, \epsilon_2 I, \epsilon_3 I, \epsilon_4^{-1}I\}$$

其中 Σ_{11}, Σ_{13}, Σ_{14}, Σ_{22}, 由定理 1 定义。

证明　把式(5) 记为 $\Xi < 0$。令 $S_{12} = 0$, $S_{22} = \epsilon_4 X^2$, 设 $W = \mathrm{diag}\{I, I, I, X^{-1}\}$。由式(11) 可得

$$W \Xi W = $$
$$\Psi_{11} + [0 \quad X \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \epsilon_4 I [0 \quad X \quad 0 \quad 0] +$$
$$\begin{bmatrix} YD_a & YD_b & VD_c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_aX & 0 & 0 \\ 0 & E_bU & 0 & 0 \\ 0 & E_cX & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} 0 & E_aX & 0 & 0 \\ 0 & E_bU & 0 & 0 \\ 0 & E_cX & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} YD_a & YD_b & VD_c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \leq$$
$$\Psi_{11} + \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^{\mathrm{T}}$$

因此, 由 Schur 补公式可知, 如果式(12) 成立, 则式(5) 必然成立。(证毕)

注 1　在以上证明中, 不等式右边的矩阵依赖于参数 δ, 并且很多元素为零, 因此这样的不等式并不保守。式(12) 是 2^s 个线性矩阵不等式。定理 2 的结果依赖于 ΔA, ΔB 和 ΔC 的分解, 目前还没有一个统一的分解方法保证不等式(12) 尽可能有解, 因此只能用试凑的办法来求解。尽管如此, 某些情况下此法还是可行的。

4　应用举例

考虑不确定线性时滞系统(1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3.2 & 1.1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & -0.1\delta \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2\delta \end{bmatrix}$$

$$\Delta C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1\delta \\ 0 & 0.2\delta \end{bmatrix}, \quad \Delta A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0.1\delta \\ 0 & 0.1\delta \end{bmatrix}$$

$$|\delta| \leq 1$$

取

$$D_a = \begin{bmatrix} 0 & -0.1\delta \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad E_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2\delta \end{bmatrix}, \quad E_b = 1$$

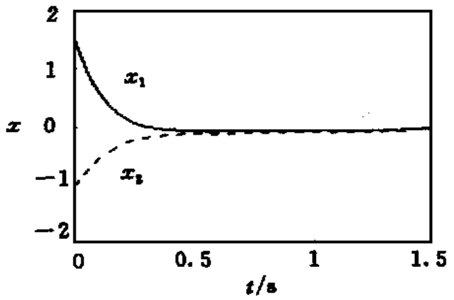

图 1　闭环状态 x 的轨线

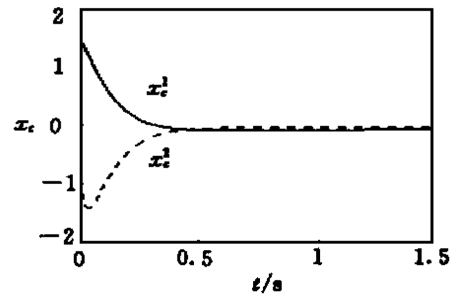

图 2　闭环状态 x_c 的轨线

$$D_c = \begin{bmatrix} 0.1\delta \\ 0.2\delta \end{bmatrix}, \quad E_c = [0 \quad 1]$$

$$\epsilon_1 = 0.3, \quad \epsilon_2 = 0.5, \quad \epsilon_3 = 1.3, \quad \epsilon_4 = 1.2$$

求解不等式(6) 和(12), 得系统(1) 的镇定控制器(2), 其中

$$A_c = \begin{bmatrix} -34.3039 & -0.5548 \\ -14.6062 & -44.8066 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 10.5025 & -2.1680 \\ 0.5854 & 12.6817 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [0.8739 \quad -4.1035]$$

取初始状态 $x(0) = x_c(0) = [1.5 \quad -1]^T$, 不确定参数 $\delta = \sin t$, 时滞 $d = 2$, 得闭环系统的状态轨线如图 1 和图 2 所示。

5　结　　语

本文研究了一类不确定线性时滞系统的输出反馈鲁棒镇定问题。基于二次 Lyapunov 泛函, 导出了一组线性矩阵不等式, 利用其解构造了全阶动态输出反馈控制器。由于线性矩阵不等式可以有效地用内点法进行数值求解[5], 因此本文的方法很容易实现。本文采用的 Lyapunov 泛函不依赖不确定参数, 因此所得结果具有一定的保守性[6]。基于依赖参数的 Lyapunov 泛函的鲁棒镇定方法是进一步研究的课题。

参考文献:

[1] Shen J C, Chen B S, Kung F C. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1991, 36(5): 638-640.

[2] Cao Y Y, Sun Y X. Robust stabilization of uncertain systems with time-varying multistate delay[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(10): 1484-1488.

[3] Choi H H, Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls[J]. Automatica, 1995, 31(9): 1349-1351.

[4] 张明君, 程储旺, 孙优贤. 不确定线性时滞系统基于观测器的鲁棒镇定[J]. 自动化学报, 1998, 24(4): 509-511.

[5] Boyd S L, E I Ghaoui L, Feron E *et al*. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[6] Feron E, Apkarian P, Gahinet P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1996, 41(7): 1041-1046.