

文章编号: 1001-0920(2001)04-0443-05

# 线性二次微分对策鞍点策略的小波分析法

张成科<sup>1</sup>, 王行愚<sup>2</sup>

(1. 广东工业大学 经济管理学院, 广东 广州 510080; 2. 华东理工大学 自动化研究所, 上海 200237)

**摘要:** 研究线性二次微分对策鞍点策略的数值求解问题, 基于小波多尺度多分辨逼近特性, 提出一种求解新方法。该方法将原问题转化为代数问题, 算法简捷明了, 适合于计算机求解。数值例子表明该方法是合理而可行的。

**关键词:** 微分对策; 鞍点策略; 数值算法; 小波分析

中图分类号: O 225

文献标识码: A

## Analysis Method for Saddle-point Strategy of Linear-quadratic Differential Game via Wavelets

ZHANG Cheng-ke<sup>1</sup>, WANG Xing-yu<sup>2</sup>

(1. College of Economics Management, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510080, China; 2. Institute of Automation, East China University of Science & Technology, Shanghai 200237, China)

**Abstract:** The numerical problem for the saddle-point strategy of linear-quadratic differential game is studied. A new method is proposed based on the multi-scale multi-resolution approximation feature of wavelets. The new method changes the problem into algebraic equations. The procedure is very simple and direct, and suitable for calculation by computers. Numerical results show that the method is rational and effective.

**Key words:** differential game; saddle-point strategy; numerical algorithm; wavelet analysis

## 1 引言

微分对策理论无论在社会经济领域还是在控制领域都占有重要的地位<sup>[1]</sup>。早在 20 世纪 60 年代, 许多开拓者就把对策论中的最小最大原理用于参数扰动下的控制器设计<sup>[2]</sup>; 到了 90 年代初, 这种基于对策论的设计思想又引起人们的广泛关注<sup>[3~6]</sup>, 被当作鲁棒设计的有力工具。文献[3]将鲁棒设计问题转化为连续对策的鞍点问题; 文献[4]将鲁棒  $H_1/H_2$  混合控制问题转化为微分线性二次 Nash 对

策问题。为了确定对策者双方的鞍点策略, 一般利用最小最大原理将问题化为求解常微分方程的两点边值问题。显然, 寻求这一问题的解析解是相当困难的, 因此有必要发展一些数值算法来寻求其鞍点策略的近似解。

文献[7]利用不动点原理给出了求解鞍点策略的数值迭代算法, 并证明了其收敛性, 具有重要的理论意义, 只是在算法的设计和实现上, 仍需反复求解常微分方程的初值。本文借助于 80 年代中期发展起

收稿日期: 1999-04-01; 修回日期: 2000-08-04

基金项目: 高校博士学科点专项科研基金项目(96025110); 广东工业大学自选项目(993009)

作者简介: 张成科(1964—), 男, 广西钟山人, 副教授, 博士, 从事小波理论及其应用、经常控制理论等研究; 王行愚(1946—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 校长, 从事智能控制及其应用等研究。

来的小波理论以及古老的正交逼近思想,给出了问题的一种求解方法。

## 2 紧支撑正交小波多分度基的运算特性

本文的分析方法主要以基于多分辨思想构造的紧支撑正交小波基作为基函数。该小波基是许多重要函数空间(如  $L^2(R)$  空间)的无条件基,因此对任意函数  $f(t) \in L^2[0, t_f]$ , 在第  $J$  级尺度空间  $V_J$  的投影可近似表示为  $\hat{m}(m = 2^J)$  阶小波级数<sup>[8]</sup>, 即

$$f(t) \approx \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk} \Psi_k(t) \quad (1)$$

其中,  $b_{j0} = \int_0^t f(t) \Psi_0(t) dt$ ,  $b_{jk} = \int_0^t f(t) \Psi_k(t) dt$ , 可由离散小波的塔式快速分解算法得到<sup>[8]</sup>;  $\Psi_0(t)$  为尺度函数,  $\Psi_k(t)$  为相应的小波函数,  $\Psi_k(t) = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k)$ 。在以下叙述中, 范数  $\|\cdot\|$  对矩阵而言是 Frobenius 范数, 对函数而言是  $L^2$  范数。

根据正交逼近方法, 为将所考虑问题的微分方程化为代数方程, 需要知道小波基函数的运算矩阵。由于紧支撑小波(除 Haar 小波外)都没有明显的表达式, 利用传统的方法(将基函数的变上限积分函数仍用基函数表示)难以获得其基函数的运算矩阵。根据文献[9]的研究, 有如下结果: 将式(1)中的小波基函数排列为

$$\Psi_{(m)}(t) = [\Psi_{0,0}(t) \ \Psi_{0,1}(t) \ \dots \ \Psi_{J-1,0}(t) \ \Psi_{J-1,1}(t) \ \dots \ \Psi_{J-1,2^j-1}(t)]^T \quad (2)$$

方块脉冲基函数取为

$$\Phi_{(m)}(t) = [\Phi_1(t) \ \Phi_2(t) \ \dots \ \Phi_m(t)]^T \quad (3)$$

其中

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_1 = [0, t_f/m] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\Phi_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i = [(i-1)t_f/m, it_f/m] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$i = 2, 3, \dots, m$

显然,  $\Phi_i(t) \in L^2[0, t_f]$ , 故可将  $\Phi_i(t)$  展为式(1)形式的小波级数, 从而可获得块脉冲基与小波基的关系式

$$\Phi_{(m)}(t) \cong D \Psi_{(m)}(t) \quad (4)$$

其中矩阵  $D$  的每个行向量  $d_i = [d_{i1} \ d_{i2} \ \dots \ d_{im}]^T$ , 可由小波滤波器系数通过离散小波快速算法得到, 且关于式(4)的误差, 有如下结论:

引理 1 对紧支集 Daubechies 正交小波  $\Psi^{[8]}$ , 存在某一  $\epsilon > 0$ , 使得

$$\| \Phi_{(m)}(t) - d_i^T \Psi_{(m)}(t) \| = O(m^{-(1+\epsilon)}) \quad (5)$$

证明参见文献[9]。

设  $P_{(m \times m)}$  (其各阶表达式参见文献[9]) 和  $G_{(m \times m)}$  分别为块脉冲基与小波基的  $m$  阶正向积分矩阵,  $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m]^T$  为  $m$  维列向量,  $M_{(m \times m)}$  为  $\Psi_{(m)}(x)$  的乘积运算矩阵, 即

$$\begin{cases} \int_a^t \Phi_{(m)}(x) dx = P_{(m \times m)} \Phi_{(m)}(t) \\ \int_a^t \Psi_{(m)}(x) dx = G_{(m \times m)} \Psi_{(m)}(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$\Psi_{(m)}(x) \Psi_{(m)}^T(x) c = M_{(m \times m)} \Psi_{(m)}(x) \quad (7)$$

则对式(4)两边从 0 到  $t$  积分再代回, 并考虑到  $\Psi_{(m)}(t)$  为正交基函数, 整理可得

$$G_{(m \times m)} = D^{-1} P_{(m \times m)} D \quad (8)$$

$$M_{(m \times m)} = D^{-1} [\text{diag}(D^{-T} c)] D \quad (9)$$

如常用的有 4 个滤波器系数的 Daubechies 小波(即 D4 小波)的 8 阶正向积分矩阵(略)。更详细更高阶的积分矩阵参见文献[9]。

对任意  $f(t) \in L^2(R)$ , 记  $Wf(t) = F_w = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]$  表示  $f(t)$  在小波基  $\Psi_{(m)}(t)$  下的展开系数。若  $Wf(t) - Wg(t) \approx \epsilon^m$  ( $m \rightarrow \infty$ ), 则称  $Wf(t)$  和  $Wg(t)$  是均方渐近相等的, 记为  $Wf(t) \sim Wg(t)$ 。关于积分矩阵运算的收敛性, 有如下结果:

定理 1 设  $f(t) \in L^2[a, b]$  可导, 且  $|f'(t)|$

$M$ , 则

$$W \left[ \int_a^t f(x) dx \right] \sim [Wf(x)] G_{(m \times m)} \quad (10)$$

证明参见文献[9]。

## 3 线性二次微分对策鞍点策略分析

设对策过程的状态方程及代价目标泛函分别为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)v(t) \\ x(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f] \end{cases} \quad (11)$$

$$L(u, v) = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T Q(t) x + u^T R_1(t) u - v^T R_2(t) v] dt \quad (12)$$

其中,  $x(t) \in R^n, u(t) \in R^{r_1}, v(t) \in R^{r_2}, u(t) \in \Omega, v(t) \in \Omega$  分别为局中人  $P_1$  和  $P_2$  的控制策略;  $Q(t) \in R^{n \times n}, R_1(t) > 0, R_2(t) > 0$ , 以及  $A(t), B_1(t), B_2(t), Q_f$  为适当维数的矩阵。这里

$$\Omega = \left\{ u(t) \mid \int_0^{t_f} u^2(t) dt < + \infty \right\}$$

$$\Omega = \left\{ v(t) \mid \int_0^{t_f} v^2(t) dt < + \infty \right\}$$

分别为  $P_1$  和  $P_2$  允许策略集。

该两人零和对策问题为: 局中人  $P_1$  力图寻求一个允许策略  $u(t) \in \Omega$ , 以使  $L(u, v)$  取最小可能的值; 相反, 局中人  $P_2$  力图寻求一个允许策略  $v(t) \in \Omega$ , 以使  $L(u, v)$  取最大可能的值。亦即寻求  $(u^*, v^*)$ , 使得

$$L(u^*, v) \leq L(u^*, v^*) \leq L(u, v^*) \quad \forall u \in \Omega, \forall v \in \Omega \quad (13)$$

满足式(13) 的策略对  $(u^*(t), v^*(t))$  称为鞍点策略;  $u^*(t)$  和  $v^*(t)$  分别称为  $P_1$  和  $P_2$  的最优策略。

为了用小波方法求解上述鞍点策略, 将式(11) 和(12) 中的函数展为式(1) 的小波级数, 即

$$\begin{cases} x(t) \triangleq X \Psi_{(m)}(t), & x^0 \triangleq X^0 \Psi_{(m)}(t) \\ u(t) \triangleq U \Psi_{(m)}(t), & v(t) \triangleq V \Psi_{(m)}(t) \\ a_{ij}(t) \cong [a_{ij}(1) \dots a_{ij}(m)] \Psi_{(m)}(t) \triangleq a_{ij} \Psi_{(m)}(t) \\ b_{ik}(t) \triangleq b_{ik} \Psi_{(m)}(t), & c_{lj}(t) \triangleq c_{lj} \Psi_{(m)}(t) \\ q_{\bar{ij}}(t) \triangleq q_{\bar{ij}} \Psi_{(m)}(t), & r_{ik}(t) \triangleq r_{ik} \Psi_{(m)}(t) \\ S_{lj}(t) \triangleq s_{lj} \Psi_{(m)}(t) \\ i = 1, 2, \dots, n, & j = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r_1, & l = 1, 2, \dots, r_2 \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_m]$$

$$U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_m]$$

$$V = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_m]$$

$$X^0 = [X_1^0 \ X_2^0 \ \dots \ X_m^0]$$

记

$$A_j = \begin{bmatrix} a^{11}(j) & a^{12}(j) & \dots & a^{1n}(j) \\ a^{21}(j) & a^{22}(j) & \dots & a^{2n}(j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n1}(j) & a^{n2}(j) & \dots & a^{nn}(j) \end{bmatrix}$$

$$B_j = \begin{bmatrix} b_{11}(j) & b_{12}(j) & \dots & b_{1r_1}(j) \\ b_{21}(j) & b_{22}(j) & \dots & b_{2r_1}(j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(j) & b_{n2}(j) & \dots & b_{nr_1}(j) \end{bmatrix}$$

$\hat{X} = X D^T, \hat{U} = U D^T, \hat{V} = V D^T$   
 $C_j, Q_j, R_j, S_j$  等记号意义类似。则将式(11) 两边从 0 到  $t_f$  积分, 并代入各展开式, 利用小波基的运算特性整理得

$$\bar{X}^T = H_0 + H_1 \bar{U}^T + H_2 \bar{V}^T \quad (16)$$

其中  $\bar{X}$  表示矩阵  $X$  的拉直运算, 即

$$\bar{X}^T = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}, \quad \bar{U}^T = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}, \quad \bar{V}^T = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 D^T & & & \\ & A_2 D^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m D^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 D^T & & & \\ & B_2 D^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m D^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C_1 D^T & & & \\ & C_2 D^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_m D^T \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \{I_{nm} - [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{A} (D \otimes I_n)\}^{-1} \bar{X}^{0T}$$

$$H_1 = \{I_{nm} - [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{A} (D \otimes I_n)\}^{-1} \times [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{B} (D \otimes I_{r_1})$$

$$H_2 = \{I_{nm} - [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{A} (D \otimes I_n)\}^{-1} \times [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{C} (D \otimes I_{r_2})$$

符号  $\otimes$  为矩阵的 Kronecker 积。式(16) 非常简便地沟通了状态与控制之间的关系。同理可将代价目标泛函转换为

$$L(U, V) = K_0 + \bar{U}^T K_1 + \bar{V}^T K_2 + \frac{1}{2} \bar{U}^T K_3 \bar{U} + \bar{U}^T K_4 \bar{V} - \frac{1}{2} \bar{V}^T K_5 \bar{V} \quad (17)$$

其中

$$E_m = [0 \ \dots \ 0 \ 1]_{1 \times m}$$

$$\hat{Q} = \text{diag}[Q_1 D^T \ Q_2 D^T \ \dots \ Q_m D^T]$$

$$\hat{R} = \text{diag}[R_1 D^T \ R_2 D^T \ \dots \ R_m D^T]$$

$$\hat{S} = \text{diag}[S_1 D^T \ S_2 D^T \ \dots \ S_m D^T]$$

$$K_0 = \frac{1}{2} H_0^T (E_m \otimes I_n)^T Q_f (E_m \otimes I_n) H_0$$

$$K_1 = H_1^T [E_m \otimes I_n]^T Q_f (E_m \otimes I_n) H_0$$

$$K_2 = H_2^T (E_m \otimes I_n)^T Q_f (E_m \otimes I_n) H_0$$

$$K_4 = H_1^T (E_m \otimes I_n)^T Q_f (E_m \otimes I_n) H_2$$

$$K_5 = \frac{t_f}{m} \hat{S} - H_2^T (E_m \otimes I_n)^T Q_f (E_m \otimes I_n) H_2$$

于是,鞍点策略问题便转化为无约束代数问题,即寻求  $(\bar{U}^{T*}, \bar{V}^{T*})$ , 使得

$$L(\bar{U}^{T*}, \bar{V}^{T*}) \quad L(\bar{U}^{T*}, \bar{V}^{T*}) \quad L(\bar{U}^{T*}, \bar{V}^{T*}) \quad (18)$$

显然,  $K_3 > 0, K_3^T = K_3, K_5^T = K_5$ 。如果  $K_5 > 0$ , 则因为

$$\begin{cases} \partial L / \partial \bar{U}^T = K_1 + K_4 \bar{V}^T + K_3 \bar{U}^T \\ \partial L / \partial \bar{V}^T = K_2 + K_4^T \bar{U}^T - K_5 \bar{V}^T \end{cases} \quad (19)$$

其中  $\partial^2 L / \partial (\bar{U}^T)^2 = K_3 > 0$   
 $\partial^2 L / \partial (\bar{V}^T)^2 = K_5 > 0$

所以  $L(\bar{U}^T, \bar{V}^T)$  关于  $\bar{U}^T$  是严格凸的, 关于  $\bar{V}^T$  是严格凹的。根据文献[1], 令式(19)为零, 可解得唯一的鞍点及其相应的最优状态为

$$\begin{cases} \bar{U}^{T*} = - (K_3 + K_4 K_5^{-1} K_4^T)^{-1} (K_1 + K_4 K_5^{-1} K_2) \\ \bar{V}^{T*} = - (K_5 + K_4^T K_3^{-1} K_4)^{-1} (K_4^T K_3^{-1} K_1 - K_2) \\ \bar{X}^{T*} = H_0 + H_1 \bar{U}^{T*} + H_2 \bar{V}^{T*} \end{cases} \quad (20)$$

再将  $\bar{U}^{T*}, \bar{V}^{T*}, \bar{X}^{T*}$  还原可得  $U^*, V^*, X^*$ , 从而可得逼近解

$$\begin{cases} \bar{u}^*(t) = U^* \Psi_m(t) \\ \bar{v}^*(t) = V^* \Psi_m(t) \\ \bar{x}^*(t) = X^* \Psi_m(t) \end{cases} \quad (21)$$

### 4 举例分析

考虑如下线性时变系统及目标泛函

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= tx(t) + u(t) + 2v(t) \\ x(0) &= 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

$$L(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t) - 4v^2(t)] dt$$

问题是在约束(23)下求策略对  $(u^*(t), v^*(t))$ , 使得

$$L(u^*, v) \quad L(u^*, v^*) \quad L(u, v^*)$$

利用文献[1]中的最小最大原理, 可得

$$u^*(t) = -p(t)x^*(t), \quad v^*(t) = 0.5p(t)x^*(t)$$

其中  $p(t)$  和  $x^*(t)$  分别满足如下微分方程

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -1 - 2tp(t), \quad p(1) = 0 \\ \dot{x}^*(t) &= tx^*(t), \quad x^*(0) = 1 \end{aligned}$$

现采用 Daubechies 的 D4 小波, 并取  $m = 16$ , 按式(20)用 Matlab 语言编程计算, 可得式(21)。图1和图2分别给出了它们的对比曲线。

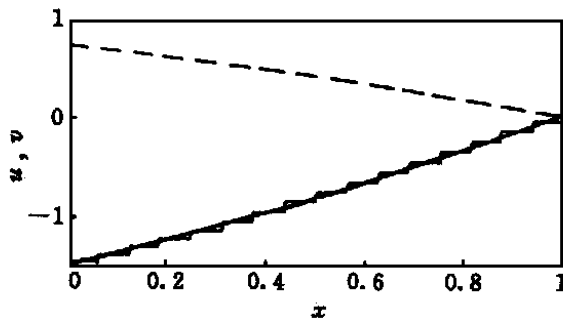


图1  $u^*(t)$  与  $\bar{u}^*(t)$  及  $v^*(t)$  与  $\bar{v}^*(t)$  的对比

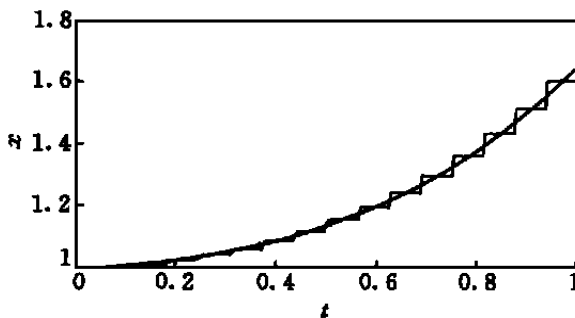


图2  $x^*(t)$  与  $\bar{x}^*(t)$  的对比

### 5 结 语

本文利用小波理论讨论了一类鞍点策略的计算方法, 它将原问题转化为代数问题, 并可获得逼近解的解析表达式。该方法不仅具有传统逼近方法的优点, 而且由离散小波的快速算法很容易得到小波展开式的系数; 同时小波基的多分辨特性还能在不同局部区域选择不同的分辨度, 对改变局部区域的控制效果起到了积极的作用。下一步工作将讨论小波逼近解是否均方收敛于真解, 并用这种方法求解文献[4]中的鲁棒控制问题。

(下转第 451 页)

可不变地采用同一控制策略避免死锁状态出现。

### 参考文献:

- [1] 常发亮, 刘长有. 自动化立体仓库输送系统调度的优化仿真及其应用研究[J]. 系统仿真学报, 1998, 10(4): 14-19.
- [2] 孙相建, 田国会, 刘长有. 输送系统的 Petri 网建模分析与控制[A]. 1997 中国控制与决策学术年会论文集[C]. 沈阳: 东北大学出版社, 1997. 874-877.
- [3] Galton A. Temporal logics and their applications[M]. London: Academic Press, 1987.
- [4] Ostroff J S, Wonham W M. A framework for real time discrete event control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1990, 35(4): 386-397.
- [5] 田国会, 刘长有, 徐心和. 实时离散事件系统的 TOOCPN/RTTL 研究框架[A]. 1997 中国控制与决策学术年会论文集[C]. 沈阳: 东北大学出版社, 1997. 853-856.
- [6] 李晓欧. 面向对象着色 Petri 网及其在 FMS 中应用研究[D]. 沈阳: 东北大学, 1995.
- [7] Maria Pia Fantì, Guido Maione, Biagio Turchiano. Deadlock avoidance in manufacturing systems modeled by Petri net[A]. Proc of the 14th World Congress of IFAC[C]. Beijing, 1999. 157-162.
- [8] Vshio T. Maximally permissive feedback and modular control synthesis in Petri nets with external input places[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1990, 35(7): 844-848.

(上接第 446 页)

### 参考文献:

- [1] Basar T, Olsder G J. Dynamic noncooperative game theory[M]. New York: Academic Press, 1982.
- [2] Doroto P, Kestembaum A. Application of game theory to the sensitivity design of optimal control[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1967, 12(1): 85-87.
- [3] 顾兴源, 陈文华. 基于对策论的鲁棒输出反馈控制器设计[J]. 信息与控制, 1991, 20(2): 16-20.
- [4] Limebeer D J N, Anderson B D O, Hendel B. A Nash game approach to mixed  $H_2/H_\infty$  control[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(1): 69-82.
- [5] Limebeer D J N. A game theory approach to digital robust control[A]. Proc of 28th IEEE Conf on Decision and Control[C]. Tampa, 1989. 878-880.
- [6] Basar T. Minimax control for the LTI plant with I-Bound Disturbance[A]. Proc of 11th IFAC World Congress[C]. Moscow, 1990. 472-479.
- [7] 吴汉生. 一类定量微分对策理论中最优策略的算法及其收敛性[J]. 自动化学报, 1992, 18(2): 143-150.
- [8] Daubechies I. Orthonormal based of compactly supported wavelets[J]. Comm Pure and Appl Math, 1988, 41: 909-996.
- [9] 张成科. 基于小波分析的控制理论若干问题研究[D]. 上海: 华东理工大学自动化研究所, 1999.