

文章编号: 1001-0920(2001)04-0473-04

带终端滑模约束的非线性模型预测控制方法

周建锁, 刘志远, 裴 润

(哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 将预测控制和滑模控制结合起来, 提出一种非线性模型预测控制方法。给出一种可行的双模控制方案, 系统状态位于终端区外时采用提出的预测控制, 在终端区内部采用离线设计的滑模控制。对系统终端滑模附加不等式约束, 使得系统状态在预测时域的末端位于离线设计的滑动模态区内, 从而使预测时域减小。仿真结果表明了算法的有效性。

关键词: 非线性模型预测控制; 双模控制; 终端区

中图分类号: TP 273

文献标识码: A

Nonlinear Model Predictive Control Scheme with Terminal Sliding Mode Constraint

ZHOU Jian-suo, LIU Zhi-yuan, PEI Run

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: A nonlinear model predictive control scheme combining predictive control and sliding mode control is proposed as the dual mode control. The presented model predictive controller is implemented when system state is outside the terminal region, and sliding mode controller designed off-line is used inside the region. By constraining the terminal sliding mode with an inequality, the system terminal state is forced into the pre-designed sliding mode region, which makes predictive horizon short greatly. The closed-loop stability of the resulting dual model control system is proved, and furthermore the system performance is analyzed. Simulation results show the effectivity of the proposed algorithm.

Key words: nonlinear model predictive control; dual mode control; terminal region

1 引 言

保证非线性模型预测控制(NMPC)的稳定性基本可分为以下几种方法: 无限预测时域NMPC方法^[1]; 有限预测时域附加终端状态等式约束方法^[2]; 有限预测时域附加终端状态不等式约束方法^[3~5]。滑模控制将高维复杂系统的运动变为两个低维数的运动^[6], 但一般不能处理控制约束和状态约束。

本文将NMPC和滑模控制结合起来, 首先离线设计出切换函数使得滑动模态渐近稳定, 然后在有限预测时域的基础上对切换函数终端加以约束, 使得切换函数终端位于终端区内。给出一种双模控制方案, 即在终端区外采用滑模预测控制, 当系统状态到达终端区后采用离线设计的滑模控制。分析了滑模预测控制系统的闭环稳定性及系统性能。仿真表明, 由于采用了离线设计的滑模控制, 附加终端滑模

收稿日期: 2000-02-28; 修回日期: 2000-12-04

基金项目: 黑龙江省博士后科研启动基金项目; 哈尔滨工业大学校科学研究基金项目(HIT2000-40)

作者简介: 周建锁(1973—), 男, 河北宽城人, 博士生, 从事非线性预测控制、 H_∞ 控制等研究; 裴润(1939—), 男, 北京人, 教授, 博士生导师, 从事机器人控制、计算机控制等研究。

不等式约束的系统在保证稳定性的同时,既降低了预测时域,又减小了计算量。

2 终端不等式约束非线性滑模预测控制

研究约束非线性系统

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ x(k) \in X \subset R^n, u(k) \in U \subset R^m \\ f(0,0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

选择切换函数 $s(k) = s(x(k))$,使其滑动模态渐近稳定;求取滑模控制 $u_{vsc}(k) = u_{vsc}(x(k))$,使得系统状态在有限时间内到达切换面 $s = 0$ 。滑模上的等效控制记为 $u_{eq}(x)$,并将 $u_{eq}(x)$ 增广到 $x \in X$,记为 $u_{eq}(x)$ 。采用最终滑动模态 $s(x) = 0, s(x) = [s_1(x) s_2(x) \dots s_m(x)]^T$ 。采样周期为 T ,取离散趋近律^[6]

$$s(k+1) = -\beta \text{sgn}s(k) + \alpha s(k) \quad (2)$$

其中, $\beta = \epsilon T, \alpha = I - qT, \epsilon = \text{diag}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\} (\epsilon_i > 0), q = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_m\}, 0 < q_i T < 1$ 。

定义1 集合

$$\begin{aligned} S &= \{x \mid x \in X, s(x) = 0\} \\ S_i^{\Delta} &= \{x \mid x \in X, \Delta_{1i} \leq |s_i(x)| \leq \Delta_{2i}, \\ &\quad u_{vsc}(x) \in U, \Delta_{1i} = \epsilon T\} \\ S_i^{\Delta_{2i}} &= \{x \mid x \in X, |s_i(x)| \leq \Delta_{2i}, u_{vsc}(x) \in U\} \\ S^{\Delta_2} &= \bigcap_{i=1}^m S_i^{\Delta_{2i}}, S^{\Delta} = \bigcap_{i=1}^m S_i^{\Delta} \\ &\quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

用 $x_k(i) = x(k+i|k), u_k(i) = u(k+i|k)$ 和 $s_k(i) = s(x_k(i))$ 表示 k 时刻第 i 步状态、控制和切换函数预测值。 k 时刻 N 步预测控制序列 $u_N(k) = \{u_k(i), i = 0, 1, \dots, N-1\}$ 。在 $u_N(k)$ 作用下,得到状态及切换函数预测序列 $x_N(k) = \{x_k(i), i = 1, 2, \dots, N\}$ 和 $s_N(k) = \{s_k(i), i = 1, 2, \dots, N\}$ 。这样,带终端不等式约束的非线性滑模预测控制问题可描述为

$$P_N(x): \min_u J_N(s, u) \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_k(i+1) = f(x_k(i), u_k(i)) \\ u_k(i) \in U, x_k(i) \in X, s_k(N) \in S^{\Delta} \end{cases} \quad (3)$$

其中,预测性能指标为

$$J_N(s, u) = \sum_{i=0}^{N-1} l(s_k(i), u_k(i)) + F(s_k(N))$$

式中

$$l(s_k(i), u_k(i)) = \frac{1}{2} s_k(i)^T Q + \frac{1}{2} u_k(i)^T R$$

$$l(0, u_{eq}(x)) = 0, F(s_k(N)) = \frac{1}{2} s_k(N)^T Q_1$$

$$v^T A = v^T A v, u_k(i) = u_k(i) - u_{eq}(x_k(i))$$

$Q, R, Q_1 \in R^{m \times m}$ 为正定对称矩阵。

在 k 时刻求解非线性规划 $P_N(x)$, 可得最优预测控制序列 $u_N^*(k) = \{u_k^*(i), i = 0, 1, \dots, N-1\}$, 将 $u(k) = u_k^*(0)$ 作用于系统,下一时刻基于 $x(k+1)$ 重复优化,形成闭环控制。给出双模控制律为

$$u(k) = \begin{cases} u_k^*(0), & x(k) \in X/S^{\Delta_2} \\ u_{vsc}(x(k)), & x(k) \in S^{\Delta_2} \end{cases} \quad (4)$$

3 系统闭环稳定性分析

引理1 如果: 1) 优化问题在初始时刻 k 有解; 2) 对于 $\forall x \in S^{\Delta_2}$, 存在 $\gamma > 0$, 使得 $u_{vsc}(x) - u_{eq}(x) \in \gamma S^{\Delta_2}$; 3) 设计 ϵ 和 $q_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 使得 $2\alpha < 1$; 4) 设计正定对称矩阵 Q, R, Q_1 和 α 使得 $Q + \lambda R + \alpha^T Q_1 \alpha - Q_1$ 是负定或半负定的; 5) 系统状态 $x \in S^{\Delta_2}$ 。则有 $J_N^*(k+1) - J_N^*(k) - l(s(k), u(k))$, 且系统状态能在有限时域进入终端区。

证明 令 k 时刻最优性能指标为 $J_N^*(k)$ 。在采样时刻 $k+1$, 定义可行的控制序列 $u_N(k+1)$ 为

$$u_N(k+1) = \{u_k^*(1), \dots, u_k^*(N-1), u_{k+1}(N-1)\}$$

其中, $u_{k+1}(N-1) = u_{vsc}(x_k^*(N))$ 使得 $x_{k+1}(N) = f(x_k^*(N), u_{k+1}(N-1)) \in S^{\Delta_2}$, 且有 $s_{k+1}(N) = -\beta \text{sgn}s_k^*(N) + \alpha s_k^*(N)$ 。则相应的状态预测序列 $x_N(k+1)$ 和切换函数预测序列 $s_N(k+1)$ 为

$$\begin{cases} x_N(k+1) = \{x_k^*(2), \dots, x_k^*(N), x_{k+1}(N)\} \\ s_N(k+1) = \{s_k^*(2), \dots, s_k^*(N), s_{k+1}(N)\} \end{cases} \quad (5)$$

在可行的控制序列 $u_N(k+1)$ 作用下,将性能指标值记为

$$J_N(k+1) = J_N^*(k) - l(s_k^*(0), u_k^*(0)) + \mathcal{Q} \quad (6)$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2} (s_k^*(N))^T (Q + \lambda R + \alpha^T Q_1 \alpha - Q_1) s_k^*(N) - \Gamma_k \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (\text{sgn}s_k^*(N))^T \Lambda^T Q_1 \beta \text{sgn}s_k^*(N) \\ \Lambda &= \text{diag}\{\alpha |s_{k,1}^*(N)|, \dots\} \end{aligned}$$

$$0.5\beta_1, \dots, \alpha_n \left| s_{k,m}^*(N) \right| - 0.5\beta_n \} \\ s_k^*(N) = [s_{k,1}^*(N) \ s_{k,2}^*(N) \ \dots \ s_{k,m}^*(N)]^T$$

由 $x_k^*(N) \in S^{\Delta}$ 知 $\Delta_{1i} \left| s_{k,i}^*(N) \right| \leq \Delta_{2i}, i = 1, 2, \dots, m$; 由引理 1 中 3) 和 $\Delta_{1i} = \beta_i$ 知 $\Lambda = 0$, 因此 $\Gamma_k = 0$, 所以由式(7) 和引理 1 中 4) 知 $\mathcal{Q} = 0$.

$k + 1$ 时刻的优化性能指标记为 $J_N^*(k + 1)$, 则有 $J_N^*(k + 1) = J_N^*(k + 1)$ 。因此由式(6) 有

$$J_N^*(k + 1) - J_N^*(k) = -l(s(k), u(k)) \quad (8)$$

引理 2 当 k_1 时刻系统状态 $x(k_1) \in S^{\Delta_2}$ 时, 采用离线设计的滑模控制器 $u_{vsc}(x)$, 使得 $x(k_1 + i) \in S^{\Delta_2}, i = 1$, 且 k_1 时刻以后的滑模变结构控制系统渐近稳定^[6]。

定理 1 由引理 1 和引理 2 知, 在满足引理 1 的条件下, 式(4) 双模控制器能保证闭环系统渐近稳定。

4 系统性能分析

在时刻 k_1 , 如果 $x(k_1) \in S^{\Delta_2}$, 则定义终端区内无穷时域性能指标

$$J^*(k_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \{ \| s_{k_1}(i) \|^2_{\mathcal{Q}} + \| u_{vsc}(x_{k_1}(i)) - u_{eq}(x_{k_1}(i)) \|^2_{\mathcal{R}} \} \quad (9)$$

引理 3 当 $x(k_1) \in S^{\Delta_2}$ 时, 如果: 1) $\beta = 0$; 2) 对于 $\forall x \in S^{\Delta_2}$, 存在 $\gamma > 0$, 使得 $\| u_{vsc}(x) - u_{eq}(x) \|^2_{\mathcal{R}} \leq \gamma \| s(x) \|^2_{\mathcal{R}}$; 3) 设计正定对称矩阵 Q, R, Q_2 和 α 使得 $Q + \mathcal{M} + \alpha^T Q_2 \alpha - Q_1$ 是负定或半负定的, $Q_2 = ((I - \alpha)^{-1})^T (Q + \mathcal{M}) (I - \alpha)^{-1}$, 则有 $J^*(k_1) < F(s(k_1))$ 。

证明 k_1 时刻后用滑模控制作为预测控制, 由条件 2) 有

$$J^*(k_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \| s_{k_1}(i) \|^2_{\mathcal{Q} + \mathcal{M}} = \frac{1}{2} s^T(k_1) \{ Q + \mathcal{M} + \alpha^T M \alpha \} s(k_1) \quad (10)$$

由 $M = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^i)^T (Q + \mathcal{M}) (\alpha^i) < Q_2$ 知 $J^*(k_1) < \frac{1}{2} s^T(k_1) \{ Q + \mathcal{M} + \alpha^T Q_2 \alpha \} s(k_1)$ 。由 $F(s(k_1)) = \frac{1}{2} \| s(k_1) \|^2_{\mathcal{Q}_1}$ 及条件 3) 即得结论。

定理 2 在满足引理 1 和引理 3 的条件下, 在 k 时刻 ($x(k) \in X/S^{\Delta_2}$) 时, 系统 N 步预测优化指标 $J_N^*(k)$ 与此无穷时域预测性能指标 $J^*(k)$ 的关系

为 $J^*(k) < J_N^*(k)$ 。其中

$$J^*(k) = \sum_{i=0}^{N-1} l(s_k^*(i), u_k^*(i)) + l(s_k(i), u_{vsc}(x_k(i)))$$

类似于文献[4], 可将有限预测时域推广至准无限。

5 仿真研究

研究非线性系统^[4] $\dot{x}_1 = -x_2 + u (0.5 + 0.5x_1), \dot{x}_2 = x_1 + u (0.5 - 2.0x_2), |u| \leq 1.0, |x_1| \leq 1.0$ 。选取 $s(x) = cx^3 + x_2, c = 0.2$, 则 $S^{\Delta} = \{x \mid |cx^3 + x_2| \leq 0.05, |x_1| \leq 1.0\}$ 。取 $Q = 1.0, R = 0.01, \gamma = 100, Q_1 = 3.0, \alpha = 0.5$ 。仿真中 $x(0) = [-0.95 \ 1.0]^T$, 采样周期 $T = 0.1s$ 。

仿真结果如图 1 和图 2 所示。可以看出, 系统能满足状态约束和控制约束, 而且系统的状态轨迹比较平滑。预测控制曲线的不光滑是由于非线性规划算法(SQP)、采样步长选取及近似积分等原因造成的。合理的终端滑模区将使预测时域降低。仿真中 $N = 20$, 预测时域 $T_p = 2.0s$, 而文献[4]中 $T_p = 4.4s$ 。

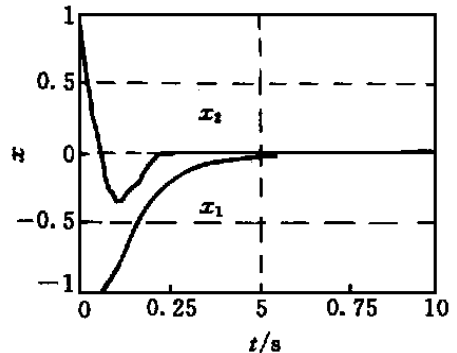


图 1 状态变量曲线

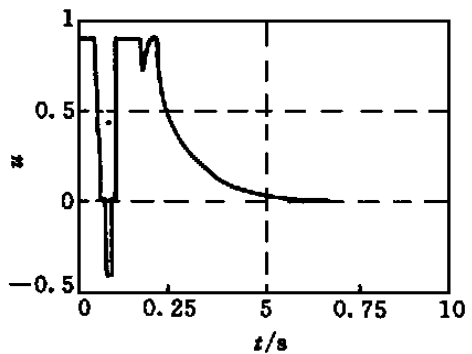


图 2 控制作用曲线

(下转第 479 页)

5 结 论

本文基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出一种可以实现一大类连续时间混沌系统控制与同步的状态反馈方法。一般情况下, 控制器由线性和非线性两部分组成, 当系统线性部分的系数阵是 Hurwitz 矩阵时, 控制器仅有非线性部分。理论分析和计算机仿真都已证明, 无论目标(驱动)系统是处于平衡点、周期、拟周期, 还是混沌或超混沌状态, 采用本文设计的控制器可使被控对象(响应系统)按照目标系统给定的轨道演化, 并且误差系统是大范围渐近稳定的。

参考文献:

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824
 [2] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos [J].

- Phys Rev Lett, 1990, 64: 1196-1199
 [3] Chen G, Deng X. From chaos to order [M]. Singapore: World Scientific, 1998
 [4] Wu C W, Chua L O. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems [J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1994, 4(4): 979-998
 [5] Bernardo M D. An adaptive approach to the control and synchronization of continuous-time chaotic systems [J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1996, 6(3): 557-568
 [6] Bernardo M D. A purely adaptive controller to synchronize and control chaotic systems [J]. Phys Lett A, 1996, 214: 139-144
 [7] Fradkov L A, Markov Y A. Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification [J]. IEEE Trans on Circ Syst, 1997, 44(10): 905-926

(上接第 475 页)

6 结 论

本文将非线性预测控制和滑模控制有效地结合起来, 提出一种可行的双模控制方案, 即在终端区外采用预测控制, 在终端区内采用离线设计的滑模控制; 并对系统闭环稳定性及系统性能进行分析。所提出的方法类似于终端状态不等式约束^[4,5]的非线性模型预测控制, 但其终端状态吸引区的求取要经过线性化处理, 而终端滑模约束条件则较为容易实现。终端滑模区的利用使得预测时域降低, 计算量减小。对提出的滑模预测控制方案的鲁棒性, 尚待进一步研究。

参考文献:

- [1] Rawlings J B, Muske K R. The stability of constrained receding horizon control [J]. IEEE Trans on Autom

- Contr, 1993, 38(10): 1512-1516
 [2] Mayne D Q, Michalska H. Receding horizon control of nonlinear systems [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1990, 35(7): 814-824
 [3] Chen H. Stability and robustness considerations in nonlinear model predictive control [M]. Düsseldorf: VDI Verlag, 1997. 19-43
 [4] Chen Hong, Allgöwer Frank. A quasi-infinite horizon predictive control scheme for constrained nonlinear systems [J]. Control Theory and Appl, 1999, 16(3): 313-319
 [5] Michalska H, Mayne D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1993, 38(11): 1623-1633
 [6] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1996. 282-284