

文章编号: 1001-0920(2001)04-0476-04

# 连续时间混沌系统控制与同步的状态反馈方法

卢俊国, 汪小帆, 王执铨

(南京理工大学 自动控制系, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 将连续时间混沌系统的控制与同步问题统一处理, 在系统的非线性是 Lipschitz 非线性的条件下, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出一种实现连续时间混沌系统控制与同步的状态反馈方法。无论驱动系统处于何种状态, 该方法都可使响应系统按照驱动系统给定的轨道演化。该方法对系统参数不匹配及噪声干扰具有一定的鲁棒性。数值仿真结果表明了所提出方法的有效性。

**关键词:** 混沌; 混沌同步; 混沌控制

中图分类号: TP 27

文献标识码: A

## State Feedback Approach to Controlling and Synchronizing Continuous-time Chaotic Systems

LU Jun-guo, WANG Xiao-fan, WANG Zhi-quan

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** A state feedback approach to controlling and synchronizing continuous-time chaotic systems is presented. Supposing the nonlinear parts of the chaotic systems are Lipschitz nonlinearity, synchronization of the drive and response systems can be accomplished by using the proposed approach. The proposed approach can tolerate nontrivial parametric mismatches as well as additive noise. Numerical experimental examples are used to verify the theoretical results.

**Key words:** chaos; synchronization of chaos; control of chaos

## 1 引言

随着驱动-响应同步方法<sup>[1]</sup>和 OGY 控制方法<sup>[2]</sup>的提出, 混沌控制与混沌同步及其在保密通信、信号处理和生命科学等领域的应用引起了人们的广泛兴趣<sup>[1~7]</sup>。国际上混沌控制方法及其实验的研究迅速发展, 混沌同步也进一步拓广。混沌同步属于混沌控制的范畴, 典型的是 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup>提出的驱动-响应同步方法, 它的思想已拓展到非混沌同步(周期、准周期等)及高阶级联同步。控制与同步问题通过 Chua 等人<sup>[4]</sup>的工作已合并成一个问题, 即混沌同

步问题可看成是一类让被控系统混沌轨道按目标系统轨道运动的控制问题, 以及控制问题可看作是一类让被控制系统的轨道与目标系统的轨道(平衡点、周期、拟周期)同步的问题。Bernardo<sup>[5,6]</sup>提出一种模型参考自适应控制方法, 当目标系统和被控制系统的状态都有界时, 通过自适应控制环节和相应的控制算法, 使被控系统按照目标系统给定的轨道演化。

本文将连续时间混沌系统控制与同步问题统一处理, 在系统的非线性是 Lipschitz 非线性条件下, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出一种状态反馈控制与同步方法, 并从理论上证明: 无论目标(驱动)

收稿日期: 2000-04-29; 修回日期: 2000-09-01

作者简介: 卢俊国(1975-), 男, 福建龙岩人, 博士生, 从事非线性控制、混沌控制等研究; 王执铨(1939-), 男, 湖北武汉人, 教授, 博士生导师, 从事动态大系统、混沌控制等研究。

系统是处于平衡点、周期、拟周期, 还是混沌、超混沌状态, 采用本文设计的控制器, 可使被控对象(响应系统)按照目标系统给定的轨道演化, 且误差系统是大范围渐近稳定的; 该控制器对噪声干扰和参数不匹配具有一定的鲁棒性。最后以蔡氏电路为例进行数值仿真, 结果表明所提出方法是有效的。

## 2 混沌控制与同步问题的描述

考虑如下两个系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(g(x, t) + u(t)) \\ x(0) = x_0 \quad R^n \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bg(y, t) \\ y(0) = y_0 \quad R^n \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $g: R^n \times R \rightarrow R^m, x \in R^n, y \in R^n, u(t) \in R^m, B \in R^{n \times m}, (A, B)$  可控。记  $e(t) = x(t) - y(t)$ , 则控制响应系统(1)与驱动系统(2)同步的问题, 就是寻找一个合适的控制  $u(t) = h(x, y, t)$ , 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

成立。系统(1)的控制与同步问题可转化为对误差系统进行研究, 误差系统为

$$\dot{e} = Ae(t) + B(g(x, t) - g(y, t) + u(t)) \quad (3)$$

注 1 系统(1)具有广泛的应用背景, 许多实际的混沌系统均由线性部分和非线性部分组成, 如著名的蔡氏电路, Rossler 混沌系统, Lorenz 混沌系统等均如此。在混沌控制和同步化问题中, 外加控制的形式在某种情况下可人为选取, 这也是混沌控制和同步化问题所具有的特殊性。

## 3 混沌的控制与同步误差反馈控制器设计

本文的控制与同步误差反馈控制器由线性部分和非线性部分组成, 如图 1 所示。

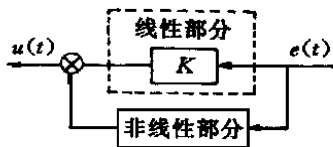


图 1 控制与同步误差反馈控制器

### 3.1 误差反馈控制器线性部分设计

为实现混沌系统的控制与同步, 首先应使误差系统(3)中的线性部分  $\dot{e}_l = Ae_l$  在原点是大范围渐近稳定的。为此, 选择一个状态反馈控制律  $u_l(t) = -Ke_l(t)$ , 使得闭环系统

$$\dot{e}_l = (A - BK)e_l(t) \quad (4)$$

在原点是大范围渐近稳定的, 其中  $K$  可用 LQR 方法或极点配置法确定。根据 Lyapunov 稳定性理论, 对任给的对称正定阵  $Q \in R^{n \times n}$ , 存在对称正定阵  $M \in R^{n \times n}$ , 满足 Lyapunov 方程

$$(A - BK)^T M + M(A - BK) = -Q \quad (5)$$

### 3.2 控制与同步误差反馈控制器的非线性部分设计

误差系统(3)中含有非线性部分  $g(x, t)$  和  $g(y, t)$ , 因此必须在上述工作基础上确定一个合适的  $u(t)$ , 使得系统(3)中的  $e(t)$  有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。

假设 1 设误差系统(3)的非线性部分  $g: R^n \times R \rightarrow R^n$  满足 Lipschitz 条件, 即

$$\|g(x, t) - g(y, t)\| \leq \gamma \|x - y\|$$

其中,  $x \in \Omega \subset R^n, y \in \Omega \subset R^n$ 。  $\Omega$  和  $\Omega$  分别为系统(1)和(2)的状态空间,  $\gamma$  为其 Lipschitz 常数。

注 2 假设 1 看似不易做到, 其实由于混沌系统的吸引子具有有界性, 故几乎所有混沌系统中的非线性都可看作满足 Lipschitz 条件, 至少是满足局部 Lipschitz 条件。如蔡氏电路中的非线性满足全局 Lipschitz 条件, Rossler 和 Lorenz 混沌系统中的非线性满足局部 Lipschitz 条件。

至此, 我们已选择一个控制器  $u(t)$  具有如下形式

$$u(t) = -Ke(t) - K_0 e \operatorname{sign}(B^T M e) \quad (6)$$

其中,  $K \in R^{n \times n}$  可用 LQR 方法或极点配置法确定,  $M$  由式(5)给定,  $K_0 \in R^+$ 。对此, 有如下定理:

定理 1 若系统(1)和(2)满足假设 1, 且控制  $u(t)$  由式(6)确定, 则当取  $K_0 > \gamma$  时, 对于所有的初始条件  $e(0)$ , 都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。进而无论系统(2)处于何种状态, 系统(1)在控制器(6)的作用下都能与系统(2)同步。

证明 取 Lyapunov 函数  $V(e) = e^T M e$ , 其中  $M = M^T > 0$  由式(5)给出,  $V(e)$  对所有  $e \in R^n$  是一个正定函数。对  $V(e)$  沿式(3)对时间求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T \dot{M} e + e^T M \dot{e} = \\ &= [e^T Q e] + 2(g(x, t) - g(y, t))^T B^T M e - \\ &= 2K_0 e \operatorname{sign}(B^T M e)^T B^T M e - \\ &= [e^T Q e] - 2K_0 e \operatorname{sign}(B^T M e)^T B^T M e + \\ &= 2\gamma e \operatorname{sign}(B^T M e)^T B^T M e - \\ &= [e^T Q e] - 2(K_0 - \gamma) e \operatorname{sign}(B^T M e)^T B^T M e \end{aligned}$$

因为  $Q$  为对称正定阵, 故当  $K_0 > \gamma$  时,  $\dot{V}(e)$  为负定函数, 所以系统(3)的平衡点  $e = 0$  是大范围渐近稳定的。

定的。进而论系统(2)处于什么状态,系统(1)在控制器(6)作用下都能与系统(2)同步。(证毕)

### 3.3 纯非线性的控制与同步误差反馈控制器

现考虑误差方程(3)的特殊情况,即(3)中的线性部分矩阵  $A$  是 Hurwitz 矩阵,则在控制器(6)中可以取消线性反馈部分  $-Ke(t)$ ,从而控制器仅为

$$u(t) = -K_0 e \operatorname{sign}(B^T M e) \quad (7)$$

其中,  $K_0 \in R^+$ ,  $M$  为对称正定阵,它是如下 Lyapunov 方程

$$MA + A^T M = -Q \quad (8)$$

的解。式中  $Q$  为任给的对称正定阵。对此,有如下定理:

**定理 2** 若系统(1)和(2)满足假设 1,且误差方程(3)中的线性部分矩阵  $A$  是 Hurwitz 矩阵,控制  $u(t)$  由式(7)确定,则当取  $K_0 = \gamma$  时,对于所有的初始条件  $e(0)$ ,都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。进而论系统(2)处于何种状态,系统(1)在控制器(7)的作用下都能与系统(2)同步。

证明类似于定理 1,略。

## 4 仿真实例

我们以蔡氏电路为例进行数值仿真。仿真中初值随机选取,解 Lyapunov 方程(8)求  $M$  时取  $Q = I$ 。

描述蔡氏电路的方程为

$$\dot{x} = Ax + Bg(x) = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\alpha f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b) \times (|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$$

当  $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$  时,系

统处于混沌状态。取  $B = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,则误差系统为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix} e + B(-10(f(x_1) - f(y_1)) + u) \quad (10)$$

由于  $f(\bullet)$  为分段线性连续函数,斜率分别为  $a$  和  $b$ ,故

$$a(x_1 - y_1) \leq f(x_1) - f(y_1) \leq b(x_1 - y_1) \quad (11)$$

由(11)得  $|f(x_1) - f(y_1)| \leq |a| |x_1 - y_1|$ ,进而有

$$g(x) - g(y) = 10|f(x_1) - f(y_1)|$$

$$10|a| |x_1 - y_1| = 10|a| |x - y| \quad (12)$$

显然,  $\gamma$  可取大于  $10|a| = 12.7$  的任何值,在此取  $\gamma = 12.7$ 。

系统(10)中线性部分系数阵  $A$  为 Hurwitz 矩阵,故可用控制律(7)来实现两个相同蔡氏电路间的同步控制。取  $K_0 = 15$ ,同步误差  $e_2$  随时间  $t$  的变化情况如图 2(a) 所示,可见两个系统能很好地实现同步。

为检验本文方法对噪声的鲁棒性,对响应系统的状态观测值施加均方差为  $\sigma$  的正态分布白噪声,即  $x_i = (1.0 + \sigma N(0, 1))x_i$ ,  $N(0, 1)$  为标准正态分布白噪声,  $i = 1, 2, 3$ 。取  $\sigma = 0.01$ ,仿真结果如图 2(b) 所示,可见本文方法具有较强的抗噪声能力,能使两个混沌系统在噪声环境下很好地同步。

为检验本文方法对两个混沌系统参数不匹配的同步能力,在受控(响应)系统中取  $\beta = -14.37$ ,而在驱动系统中取  $\beta = -14.87$ ,仿真结果如图 2(c) 所示。可见本文方法对参数不匹配具有一定的鲁棒性,能使两个混沌系统在参数不匹配的情况下同步。

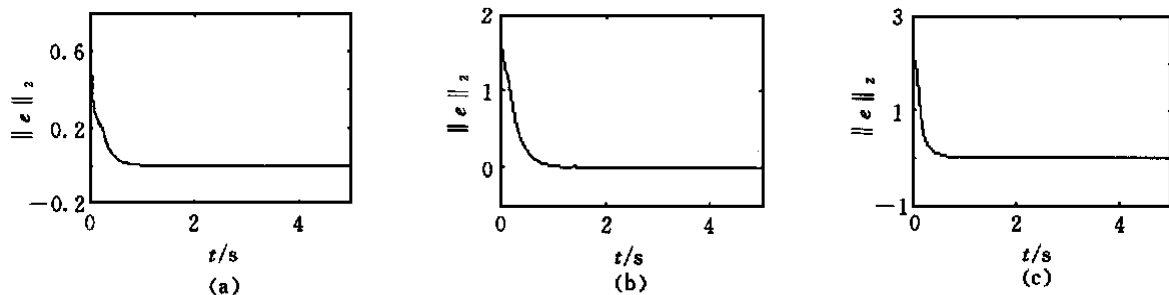


图 2 蔡氏电路同步误差

## 5 结 论

本文基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出一种可以实现一大类连续时间混沌系统控制与同步的状态反馈方法。一般情况下, 控制器由线性 and 非线性两部分组成, 当系统线性部分的系数阵是 Hurwitz 矩阵时, 控制器仅有非线性部分。理论分析和计算机仿真都已证明, 无论目标(驱动)系统是处于平衡点、周期、拟周期, 还是混沌或超混沌状态, 采用本文设计的控制器可使被控对象(响应系统)按照目标系统给定的轨道演化, 并且误差系统是大范围渐近稳定的。

### 参考文献:

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.  
 [2] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos[J].

Phys Rev Lett, 1990, 64: 1196-1199.

- [3] Chen G, Deng X. From chaos to order[M]. Singapore: World Scientific, 1998.  
 [4] Wu C W, Chua L O. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1994, 4(4): 979-998.  
 [5] Bernardo M D. An adaptive approach to the control and synchronization of continuous-time chaotic systems[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1996, 6(3): 557-568.  
 [6] Bernardo M D. A purely adaptive controller to synchronize and control chaotic systems[J]. Phys Lett A, 1996, 214: 139-144.  
 [7] Fradkov L A, Markov Y A. Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification[J]. IEEE Trans on Circ Syst, 1997, 44(10): 905-926.

(上接第 475 页)

## 6 结 论

本文将非线性预测控制和滑模控制有效地结合起来, 提出一种可行的双模控制方案, 即在终端区外采用预测控制, 在终端区内采用离线设计的滑模控制; 并对系统闭环稳定性及系统性能进行分析。所提出的方法类似于终端状态不等式约束<sup>[4,5]</sup>的非线性模型预测控制, 但其终端状态吸引区的求取要经过线性化处理, 而终端滑模约束条件则较为容易实现。终端滑模区的利用使得预测时域降低, 计算量减小。对提出的滑模预测控制方案的鲁棒性, 尚待进一步研究。

### 参考文献:

- [1] Rawlings J B, Muske K R. The stability of constrained receding horizon control [J]. IEEE Trans on Autom

Contr, 1993, 38(10): 1512-1516.

- [2] Mayne D Q, Michalska H. Receding horizon control of nonlinear systems [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1990, 35(7): 814-824.  
 [3] Chen H. Stability and robustness considerations in nonlinear model predictive control[M]. Düsseldorf: VDI Verlag, 1997. 19-43.  
 [4] Chen Hong, Allgöwer Frank. A quasi-infinite horizon predictive control scheme for constrained nonlinear systems[J]. Control Theory and Appl, 1999, 16(3): 313-319.  
 [5] Michalska H, Mayne D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1993, 38(11): 1623-1633.  
 [6] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996. 282-284.