第 16 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2001 年 7 月
Vol.16 No.4 CONTROL AND DECISION July 2001

文章编号: 1001-0920(2001)04-0484-04

不确定线性组合系统的鲁棒 H_∞ 性能的判定

李忠海[1], 张嗣瀛[2]
(1. 沈阳师范学院 数学系,辽宁 沈阳 110034; 2. 东北大学 信息科学与工程学院,辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 针对一类线性组合不确定系统的结构特征提出了分散鲁棒 H_∞ 性能的概念。它充分利用组合系统的互联结构,为研究大系统 H_∞ 性能提供了新途径。给出了大系统具有分散鲁棒 H_∞ 性能的条件,以及利用分散鲁棒 H_∞ 性能判断大系统的整个鲁棒 H_∞ 性能的方法。结果表明,大系统的 H_∞ 性能与子系统 H_∞ 性能密切相关。只要每个子系统具有鲁棒 H_∞ 性能,则在同样的控制条件下,大系统也具有鲁棒 H_∞ 性能,只是性能指标弱一些。

关键词: 鲁棒 H_∞ 控制; 线性组合系统; H_∞ 性能; 传递函数; 不确定性
中图分类号: TP 13　　文献标识码: A

Conditions for Robust H_∞ Property of Linear Composite Systems

LI Zhong-hai[1], *ZHANG Si-ying*[2]
(1. Department of Mathematics, Shenyang Teacher's College, Shenyang 110034, China; 2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The definition of decentralized robust H_∞ property is proposed based on the structure of composite systems. It is a new method to research decentralized robust H_∞ property by using of the interconnection structure. The existence conditions of decentralized robust H_∞ property are presented. The relationship between the decentralized robust H_∞ property and generalized robust H_∞ property is discussed. The conditions of generalized robust H_∞ property are given with decentralized robust H_∞ property of subsystems. The conclusion shows that the composite system would have H_∞ property at the same conditions, if each isolate subsystem had robust H_∞ property. The only difference is that the constant index is bigger.

Key words: robust H_∞ control; linear composite system; H_∞ property; transaction function; uncertainty

1 引　　言

关于不确定组合系统的 H_∞ 控制结果, 主要是在原有的分散鲁棒控制的基础上, 直接嵌入 H_∞ 性能指标, 也就是对大系统整体的鲁棒 H_∞ 控制的研究。但其获得的控制成果不多[1~4], 所采取的方法多为一般系统的鲁棒 H_∞ 控制技术的推广。郭雷等研

收稿日期: 1999-12-08; 修回日期: 2000-06-21
基金项目: 国家自然科学基金项目(79970114)
作者简介: 李忠海(1962—),男,辽宁沈阳人,教授,博士,从事大系统的对称及相似结构性质、鲁棒控制等研究; 张嗣瀛(1925—),男,山东章丘人,中国科学院院士,博士生导师,从事复杂控制系统的结构性分析、微分对策等研究。

究了基于 LMI 方法的鲁棒 H_∞ 性能问题[5], Khargoneker 等研究了 H_∞ 性能与系统稳定的关系[6]。线性组合系统具有明显的互联组合结构, 这种互联结构对系统的性质具有极其重要的作用。

本文为研究方便, 称大系统在无控制器控制的条件下, 满足干扰对输出传递函数的 H_∞ 范数作为性能指标小于预定常数的性质为大系统的整体鲁棒 H_∞ 性能; 相应地称孤立子系统的这种特性为分散鲁棒 H_∞ 性能。研究系统的 H_∞ 性能是研究大系统 H_∞ 控制的基础。由于组合系统是由若干个子系统通过互联通道联结起来的, 所以对系统的干扰可以分成子系统本身的直接干扰和由互联通道传递过来的间接干扰。对一些弱互联系统而言, 由互联通道传递过来的干扰对系统的影响较弱, 于是子系统的直接干扰便成为决定整个大系统鲁棒 H_∞ 性能的主要干扰。此时, 大系统的整体鲁棒 H_∞ 性能与孤立子系统的分散鲁棒 H_∞ 性能具有一定的等价关系。另一方面, 对于大系统的鲁棒整体 H_∞ 性能的条件有时难以满足。为此, 本文提出分散鲁棒 H_∞ 性能的概念, 给出了判断分散鲁棒 H_∞ 性能和利用分散鲁棒 H_∞ 性能判断大系统整体鲁棒 H_∞ 性能的存在条件。由本文的结论可知, 如果大系统的互联通道具有一定的结构特征或范数约束, 则由系统的分散鲁棒 H_∞ 性能即可得出系统的整体鲁棒 H_∞ 性能。

2　系统描述

考虑如下系统

$$\begin{cases} \dot{X} = (\bar{A} + \Delta A)X + \bar{B}\,\bar{w} \\ Y = \bar{C}X \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & H_{12} & H_{13} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & A_2 & H_{23} & \cdots & H_{2N} \\ H_{31} & H_{32} & A_3 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & H_{NN-1} & A_N \end{bmatrix}$$

为状态矩阵, $\Delta A = \mathrm{diag}[\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_N]$, ΔA_i 为子系统的不确定项, $X = [x_1, x_2, \cdots, x_N]^{\mathrm{T}} \in R^{nN}$ 为状态向量, $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^{\mathrm{T}} \in R^{mN}$ 为输出向量, $\bar{w} = [w, w, \cdots, w]^{\mathrm{T}} \in R^{rN}$ 为干扰输入向量, $\bar{B} = \mathrm{diag}[B_1, B_2, \cdots, B_N]^{\mathrm{T}} \in R^{nN\times rN}$ 为干扰输入矩阵, $\bar{C} = \mathrm{diag}[C_1, C_2, \cdots, C_N]^{\mathrm{T}} \in R^{mN\times nN}$ 系统输出矩阵。

定义 1(整体鲁棒 H_∞ 性能)　设 γ 为已知正常数, 如果系统(1) 满足以下两个条件, 则称系统(1) 具有整体鲁棒 H_∞ 性能。

1) $\bar{A} + \Delta A$ 是稳定矩阵, 即它的所有特征值都位于左半开平面;

2) 系统(1) 的传递函数矩阵 $P(s) := \bar{C}(sI - \bar{A} - \Delta A)^{-1}\bar{B}$, 满足 $\|P(s)\|_\infty < \gamma$。

定义 2(分散鲁棒 H_∞ 性能)　设 γ 为已知正常数, 如果系统(1) 满足以下两个条件:

1) $\bar{A} + \Delta A$ 是稳定矩阵, 即它的所有特征值都位于左开半平面;

2) 系统(1) 的子系统的传递函数矩阵 $P_i(s) := C_i(sI - A_i - \Delta A_i)^{-1}B_i$, 满足 $\|P_i(s)\|_\infty < \gamma$, $i = 1, 2, \cdots, N$。则称系统(1) 具有分散鲁棒 H_∞ 性能。

注 1　整体鲁棒 H_∞ 性能即为通常所说的鲁棒 H_∞ 性能。因为它是对整个大系统的范数要求, 与分散鲁棒 H_∞ 性能问题相比具有整体性, 所以称其为整体鲁棒 H_∞ 性能。一般而言, 整体鲁棒 H_∞ 性能和分散鲁棒 H_∞ 性能是没有直接强弱关系的。由于互联通道对干扰的传递, 可能使具有分散鲁棒 H_∞ 性能的系统并不具有整体鲁棒 H_∞ 性能, 反之亦然。下面的结果给出了在一定条件下两者的关系。

3　主要结果

如果取 $A_d := \mathrm{diag}[A_1, A_2, \cdots, A_N]$, $\bar{H} := \bar{A} - A_d$, 则有如下定理:

定理 1　如果系统(1) 满足假设 1, 那么系统(1) 对 $\gamma > 0$ 具有整体鲁棒 H_∞ 性能。

假设 1　1) 系统(1) 的互联矩阵 $\bar{H}$ 和不确定项 ΔA 与干扰输入矩阵 $\bar{B}$ 匹配, 即存在矩阵 $\bar{L} = \{L_{ij}\}$, 满足 $\bar{H} = \bar{B}\bar{L}$, $\Delta A = \mathrm{diag}[B_1L_{11}, B_2L_{22}, \cdots, B_NL_{NN}]$;

2) 对给定的 $\gamma_1 > 0$, 系统(1) 具有分散鲁棒 H_∞ 性能;

3) 对给定的 $\gamma(> \gamma_1)$, 函数 $H_{ij}(s) := L_{ij}(sI - A_i)^{-1}B_i$, 满足 $\|H_{ij}(s)\|_\infty < \epsilon$, 其中 $\epsilon \le 1 - \gamma_1/\gamma$ $(i, j = 1, 2, \cdots, N)$。

证明　因为系统(1) 具有分散鲁棒 H_∞ 性能, 所以系统(1) 稳定, 且对 $\gamma_1 > 0$, 有

$$\|P_i(s)\|_\infty < \gamma_1$$

$$\|\bar{C}(sI - \bar{A} - \Delta A)^{-1}\bar{B}\|_\infty =$$

$$\|\bar{C}(sI - A_d - \Delta A - \bar{H})^{-1}\bar{B}\|_\infty =$$

$$\|\bar{C}(sI - A_d)^{-1}[I - (\Delta A + \bar{H})(sI - A_d)^{-1}]^{-1}\bar{B}\|_\infty = \|\bar{C}(sI - A_d)^{-1}\bar{B}[I - \bar{L}(sI - A_d)^{-1}\bar{B}]^{-1}\|_\infty \le$$

$$\|\bar{C}(sI - A_d)^{-1}\bar{B}\|_\infty \|[I -$$

$$\bar{L}(sI-A_d)^{-1}B]^{-1}\|_\infty \le$$
$$\|C_i(sI-A_i)^{-1}B_i\|_\infty \frac{1}{1-\epsilon} \le$$
$$\gamma_1 \frac{1}{1-\epsilon} \le \gamma$$

由此可知系统(1) 具有整体鲁棒 H_∞ 性能。

推论 1 若 $\bar{H}=0$, 则系统(1) 具有分散鲁棒 H_∞ 性能, 当且仅当系统(1) 具有整体鲁棒 H_∞ 性能。

定理 2 如果系统(1) 满足假设 2, 那么系统(1) 对 $\gamma>0$ 具有整体鲁棒 H_∞ 性能。

假设 2 1) 对给定的正常数 $\gamma_1<\gamma$, 系统(1) 具有分散鲁棒 H_∞ 性能;

2) 对系统(1) 的互联矩阵 $\bar{H}$ 和不确定项 ΔA, 存在矩阵 D_{ij}, 满足 $H_{ij}=B_iD_{ij}C_j(i,j=1,2,\cdots,N)$, 为论证方便, 记 $\Delta A_i=H_{ii}$, 且对给定的 γ, 存在正常数 $\delta<\dfrac{\gamma-\gamma_1}{N\gamma\gamma_1}$, 使 $\|D_{ij}\|_\infty<\delta$, 其中 D_{ij} 为不确定矩阵。

证明 与定理 1 类似, 可以得到

$$Y=\bar{C}(sI-\bar{A}-\Delta A)^{-1}\bar{B}\,\bar{w}=$$
$$\mathrm{diag}\left\{C_i(sI-A_i)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N}H_{ij}x_j+B_iw\right)\right\}=$$
$$\mathrm{diag}\left\{P_i(s)w+\sum_{j=1}^{N}\left[P_i(s)D_{ij}P_j(s)w+\right.\right.$$
$$\left.\left.P_i(s)\sum_{k=1}^{N}[P_j(s)D_{jk}P_k(s)w+\cdots]\right]\right\}$$

所以

$$\|\bar{C}(sI-\bar{A}-\Delta A)^{-1}\bar{B}\|_\infty=$$
$$\left\|\mathrm{diag}\left\{P_i(s)+\sum_{j=1}^{N}\left[P_i(s)D_{ij}P_j(s)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.P_i(s)\sum_{k=1}^{N}[P_j(s)D_{jk}P_k(s)+\cdots]\right]\right\}\right\|_\infty\le$$
$$\gamma_1+\gamma_1N\delta\gamma_1+\gamma_1(N\delta\gamma_1)^2+\cdots=$$
$$\frac{\gamma_1}{1-N\delta\gamma_1}\le\gamma$$

定理 3 如果系统(1) 满足假设 3, 那么系统(1) 对 $\gamma>0$ 具有整体鲁棒 H_∞ 性能。

假设 3 1) 对正常数 δ, 系统(1) 的互联矩阵和不确定项 H_{ij} 满足 $\|H_{ij}\|_\infty<\delta<\epsilon_1\epsilon_2/N\gamma_1$;

2) 对给定的正常数 $\gamma_1<\dfrac{\gamma\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1\epsilon_2+N\gamma\delta}$, 系统(1) 具有分散鲁棒 H_∞ 性能, 其中, ϵ_1,ϵ_2 满足 $\epsilon_1\|C_i(s)\|_\infty<\gamma_1$, $\epsilon_2\|B_i(s)\|_\infty<\gamma_1$, $C_i(s):=C_i(sI-A_i)^{-1}$, $B_i(s):=(sI-A_i)^{-1}B_i$。

证明 与定理 1 类似, 可以得到

$$Y=\mathrm{diag}\left\{P_i(s)w+C_i(s)\sum_{j=1}^{N}\left[H_{ij}B_j(s)w+\right.\right.$$
$$\left.\left.C_j(s)\sum_{k=1}^{N}H_{jk}x_k\right]\right\}=$$
$$\mathrm{diag}\left\{P_i(s)+C_i(s)\sum_{j=1}^{N}[H_{ij}B_j(s)+\right.$$
$$\left.C_j(s)\sum_{k=1}^{N}[H_{jk}B_j(s)+\cdots]]w\right\}$$

所以 $$\|\bar{C}(sI-\bar{A}-\Delta A)^{-1}\bar{B}\|_\infty=$$
$$\left\|\mathrm{diag}\left\{P_i(s)+C_i(s)\sum_{j=1}^{N}\left[H_{ij}B_j(s)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.C_j(s)\sum_{k=1}^{N}[H_{jk}B_j(s)+\cdots]\right]\right\}\right\|_\infty$$

因为 $\|P_i(s)\|_\infty<\gamma_1$, 所以必存在正常数 ϵ_1,ϵ_2, 满足

$$\epsilon_1\|C_i(s)\|_\infty<\gamma_1,\quad \epsilon_2\|B_i(s)\|_\infty<\gamma_1$$
$$\|\bar{C}(sI-\bar{A}-\Delta A)^{-1}\bar{B}\|_\infty<$$
$$\gamma_1+\frac{N\gamma_1^2\delta}{\epsilon_1\epsilon_2}+\gamma_1\left[\frac{N\gamma_1\delta}{\epsilon_1\epsilon_2}\right]^2+\cdots$$

因为 $\delta<\epsilon_1\epsilon_2/N\gamma_1$, 所以

$$\|\bar{C}(sI-\bar{A}-\Delta A)^{-1}\bar{B}\|_\infty=\frac{\gamma_1\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1\epsilon_2-N\delta\gamma_1}<\gamma$$

由定理 3 可知, 如果系统(1) 对给定的正常数 γ_1 具有分散鲁棒 H_∞ 性能, 那么系统(1) 对 $\gamma>\dfrac{\gamma_1\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1\epsilon_2-N\delta\gamma_1}$ 也具有整体鲁棒 H_∞ 性能。

4 例子仿真

考虑如下稳定组合大系统

$$\dot{x}_i=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}x_i+$$
$$\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}x_j+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}w$$
$$y_i=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}x_i,\quad i,j=1,2,i\ne j$$

取系统初值 $x_{i0}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, 干扰取 $w=5\sin(5t+2)$, 孤立子系统的 $\|P_i(s)\|_\infty<0.5$, 大系统的 $\|P(s)\|_\infty<0.65$。仿真结果如图 1 所示。

从子系统和大系统的状态曲线的关系不难看

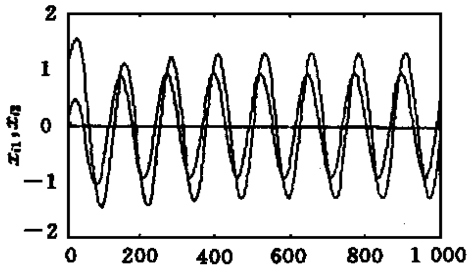

图 1　孤立子系统在干扰作用下的状态曲线

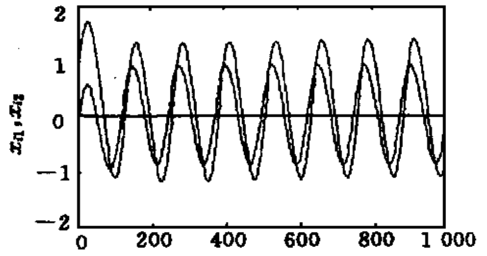

图 2　子系统 1, 2 在干扰作用下的状态曲线

出, 大系统的 H_∞ 性能略弱于孤立子系统的 H_∞ 性能。

5　结　　语

本文针对线性组合系统的结构特征提出了分散鲁棒 H_∞ 性能的概念, 并研究了分散鲁棒 H_∞ 性能存在的条件及其与整体鲁棒 H_∞ 性能的关系。由上述讨论不难发现, 分散鲁棒 H_∞ 性能与整体鲁棒 H_∞ 性能的关系决定于互联通道的性质。系统如果具有一定强度的分散鲁棒 H_∞ 性能, 只要该组合系统的互联通道较弱, 就可使系统具有整体鲁棒 H_∞ 性能。利用子系统的分散鲁棒 H_∞ 性能研究大系统的整体鲁棒 H_∞ 性能的方法具有很多优点, 它把判断大系统的 H_∞ 性能问题转化为判断孤立子系统的 H_∞ 性能问题, 而孤立子系统的维数一般较低, 利用现有的 H_∞ 控制理论很容易获得结论。与现有方法相比具有简单易用的特点。

参考文献:

[1] Chengfa C. Disturbances attenuation for interconnected systems by decentralized control[J]. Int J Control, 1997, 66(2): 213-224.

[2] L Xie, W Su. Robust H_∞ control for a class of cascaded nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1997, 42(10): 1465-1469.

[3] G Zhai, K Yasuda, M Ikeda. Decentralized H_∞ control of large-scale systems via output feedback[A]. Proc of the 33rd Conf on Decision and Control[C]. Lake Buena Vista, 1994. 2337-2339.

[4] G Zhai, M Ikeda. Decentralized H_∞ control of large-scale systems via output feedback[A]. Proc of the 32nd IEEE Conf on Decision and Control[C]. San Antonio, 1993. 1652-1653.

[5] 郭雷, 冯纯伯. 基于 LMI 方法的鲁棒 H_∞ 性能问题. 控制与决策, 1999, 14(1): 61-64.

[6] Khargoneker P, Petersen I, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stability and H_∞ control theory[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1990, 35(2): 356-361.