

文章编号: 1001-0920(2001)04-0488-03

# 白噪声 Wiener 反卷积滤波器

邓自立, 张明波

(黑龙江大学 应用数学研究所, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 应用现代时间序列分析方法, 基于 ARMA 新息模型提出了白噪声 Wiener 反卷积滤波器。该滤波器可统一处理滤波、平滑和预报问题, 可用 ARMA 递推滤波器实现, 适用于石油地震勘探数据处理。同多项式方法和 Kalman 滤波方法相比, 避免了求解 Diophantine 方程和 Riccati 方程, 减少了计算负担。Bernoulli-Gaussian 白噪声反卷积的仿真例子说明了其有效性。

**关键词:** 最优反卷积; 白噪声估值器; Wiener 滤波器; Bernoulli-Gaussian 白噪声  
**中图分类号:** O 211.64      **文献标识码:** A

## White Noise Wiener Deconvolution Filters

DENG Zi-li, ZHANG Ming-bo

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

**Abstract:** Based on the autoregressive moving average (ARMA) innovation model, the white noise Wiener deconvolution filters are presented by using the modern time series analysis method. The white noise filtering, smoothing and prediction problems can be dealt with in a unified framework. They can be implemented via the ARMA recursive filters and can be applied to data processing in oil seismic exploration. Compared with the polynomial method and Kalman filtering method, they avoid solving the Diophantine equations and Riccati equations, so that the computational burden is reduced. A simulation example for Bernoulli-Gaussian white noise deconvolution shows their effectiveness.

**Key words:** optimal deconvolution; white noise estimators; Wiener filter; Bernoulli-Gaussian white noise

## 1 引言

估计动态系统输入白噪声, 也称白噪声反卷积问题, 它在石油地震勘探数据处理中具有重要的应用背景<sup>[1]</sup>。文献[1]和文献[2, 3]用 Kalman 滤波方法和多项式方法求解该问题, 分别要求解 Riccati 方程和 Diophantine 方程。文献[4]用现代时间序列分析方法提出了在新息滤波器形式下的非递推白噪声

反卷积滤波器。本文则进一步提出在 Wiener 滤波器形式下的白噪声反卷积滤波器, 可避免求解 Riccati 方程和 Diophantine 方程, 减小了计算负担, 并可避免计算新息, 便于实时应用。

考虑线性离散随机系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \quad (2)$$

其中,  $x(t) \in R^n$  为状态,  $y(t) \in R^m$  为观测,  $w(t)$

收稿日期: 2000-02-17; 修回日期: 2000-06-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(69774019)

作者简介: 邓自立(1938—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 教授, 从事信号、状态估计等研究; 张明波(1960—), 女, 黑龙江哈尔滨人, 副教授, 从事系统仿真、最优滤波等研究。

$R'$  为输入白噪声,  $v(t)$  为观测白噪声, 都带零均值且

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} [w^T(j) v^T(j)] \right\} = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} \delta_j \quad (3)$$

其中,  $E$  为均值号,  $\delta_n = 1, \delta_j = 0 (t \neq j)$ 。白噪声 Wiener 反卷积滤波问题是: 基于观测  $(y(t+N), y(t+N-1), \dots)$  求输入白噪声  $w(t)$  的 Wiener 反卷积滤波器  $\hat{w}(t|t+N)$ , 它具有以观测  $y(t+N)$  作为输入的传递函数阵表达式, 且可表为 ARMA 递推滤波器形式。对于  $N = 0, N > 0$  或  $N < 0$ , 分别称其为反卷积滤波器、平滑器或预报器。

## 2 白噪声 Wiener 反卷积滤波器

记  $I_n$  为  $n \times n$  单位, 由式(1) 和(2) 有

$$y(t) = H(I_n - \Phi q^{-1})^{-1} \Gamma q^{-1} w(t) + v(t) \quad (4)$$

其中  $q^{-1}$  为单位滞后算子。引入左素分解

$$H(I_n - \Phi q^{-1})^{-1} \Gamma q^{-1} = A^{-1} C \quad (5)$$

其中,  $A$  和  $C$  是多项式矩阵, 形如  $X = X(q^{-1}) = X_0 + X_1 q^{-1} + \dots + X_{n_x} q^{-n_x}$ ,  $X_i$  为系数阵,  $n_x$  为阶次;  $A_0 = I_m, C_0 = 0$ 。将(5) 代入(4) 有随机系统

$$Ay(t) = Cw(t) + Av(t) \quad (6)$$

这引出 ARMA 新息模型

$$Ay(t) = D\epsilon(t) \quad (7)$$

其中,  $D$  是稳定的,  $D_0 = I_m$ , 新息  $\epsilon(t) \quad R^m$  是零均值、方差阵为  $Q_\epsilon$  的白噪声, 且有等价表示

$$D\epsilon(t) = Cw(t) + Av(t) \quad (8)$$

$D$  和  $Q_\epsilon$  可用 Gevers-Wouters<sup>[5]</sup> 算法求得。

文献[4] 证明了白噪声反卷积新息滤波器

$$\hat{w}(t|t+N) = L_N \epsilon(t+N) \quad (9)$$

$$L_N = \prod_{i=0}^N (Q_w F_i^T + S G_i^T) Q_\epsilon^{-1} q^{i-N} \quad (10)$$

其中规定  $L_N = 0 (N < 0)$ , 且  $F_i$  和  $G_i$  有递推式

$$\begin{aligned} F_i &= -D_1 F_{i-1} - \dots - D_{n_d} F_{i-n_d} + C_i \\ G_i &= -D_1 G_{i-1} - \dots - D_{n_d} G_{i-n_d} + A_i \end{aligned} \quad (11)$$

其中规定  $F_i = 0, i < 0, G_i = 0, i < 0$ 。相应的滤波误差  $(w(t) - \hat{w}(t|t+N))$  的方差阵  $P_N$  为

$$P_N = Q_w - \prod_{i=0}^N (Q_w F_i^T + S G_i^T) \times Q_\epsilon^{-1} (F_i Q_w + G_i S^T) \quad (12)$$

故当  $N$  增大时  $P_N$  将减小, 滤波精度将提高。

**定理 1** 白噪声 Wiener 反卷积滤波器为

$$\hat{w}(t|t+N) = L_N D^{-1} A y(t+N) \quad (13)$$

$$\hat{w}(t|t+N) = L_N \tilde{A} \tilde{D}^{-1} y(t+N) \quad (14)$$

带如下右素分解

$$D^{-1} A = \tilde{A} \tilde{D}^{-1} \quad (15)$$

其中,  $\tilde{A}_0 = I_m, \tilde{D}_0 = I_m$ 。或

$$\hat{w}(t|t+N) = \tilde{D}_N^{-1} L_N A y(t+N) \quad (16)$$

带如下左素分解

$$\tilde{D}_N^{-1} L_N = L_N D^{-1} \quad (17)$$

其中  $D_{N0} = I_r$  或为 ARMA 递推滤波器

$$D_N w(t|t+N) = L_N A y(t+N) \quad (18)$$

或

$$\det D w(t|t+N) = L_N \text{adj} D A y(t+N) \quad (19)$$

且上述反卷积滤波器是渐近稳定的。

证明 由(7) 和  $D$  的稳定性有

$$\epsilon(t+N) = D^{-1} A y(t+N) \quad (20)$$

将其代入(9) 得(13), 进而由(15) 和(17) 得(14), (16) 和(18)。将  $D^{-1} = \text{adj} D / \det D$  代入(13) 得(19)。由  $D$  的稳定性引出  $\tilde{D}$  和  $\tilde{D}_N$  也是稳定的, 故上述滤波器渐近稳定。(证毕)

**定理 2** 假如 ARMA 递推 Wiener 反卷积滤波器(18) 或(19) 所要求的初值  $(\hat{w}(t_0|t_0+N), \dots, \hat{w}(t_0-n_0|t_0-n_0+N))$  用(9) 计算, 则由(9) 和(18) 或(19) 决定的  $w(t|t+N)$  在数值上是恒同的。假如这些初值任意设置, 则由(18) 或(19) 决定的  $w(t|t+N)$  渐近于由(9) 决定的  $w(t|t+N)$ 。

证明 (18) 或(19) 是(9) 的递推变形, 且由其初值唯一决定。故其初值由(9) 计算时, (18) 或(19) 决定的  $w(t|t+N)$  在数值上恒同于(9)。当其初值任意设置时, 由滤波器(18) 或(19) 的渐近稳定性引出(18) 或(19) 渐近于(9)。(证毕)

**推论 1** 对于单输出( $m = 1$ ) 系统, 有白噪声 Wiener 反卷积滤波器

$$D w(t|t+N) = L_N A y(t+N) \quad (21)$$

上述结果可推广到解决如下动态系统的输入白噪声  $w(t)$  的反卷积问题<sup>[6]</sup>

$$A y(t) = C q^\tau w(t) + A v(t) \quad (22)$$

其中,  $q$  为单位前进算子,  $q w(t) = w(t+1)$ ,  $\tau$  为整数( $\tau = 0, \tau > 0$  或  $\tau < 0$ );  $A, C, w(t)$  和  $v(t)$  同上。

**推论 2** 系统(22) 有白噪声 Wiener 反卷积滤波器(13) ~ (19), 其中  $A, D$  和  $\epsilon(t)$  由(7) 决定, 且有

$$D \epsilon(t) = C q^\tau w(t) + A v(t) \quad (23)$$

$$L_N = \prod_{i=-(\tau-0)}^N (Q_w F_{i+\tau}^T + S G_i^T) +$$

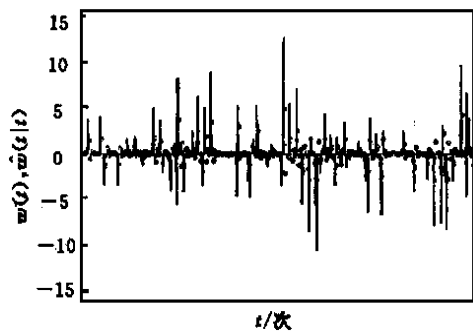


图1 Bernoulli-Gaussian 白噪声  $w(t)$  和 Wiener 反卷积滤波器  $\hat{w}(t|t)$

$$SG_{i+}^T(\tau_0) Q \varepsilon^{-1} q^{i-N} \quad (24)$$

其中定义  $(\tau_0) = \max(\tau, 0)$ ,  $(\tau_0) = \min(\tau, 0)$ ;  $F_i$  和  $G_i$  由 (11) 计算, 并将  $C_i$  和  $A_i$  分别用  $\bar{C}_i$  和  $\bar{A}_i$  代替, 且定义  $\bar{C} = Cq^{(\tau_0)}$ ,  $\bar{A} = Aq^{(-\tau_0)}$ . 规定当  $N < -(\tau_0)$  时,  $L_N = 0$ .

证明 可将  $\tau > 0$  和  $\tau < 0$  情形转化为  $\tau = 0$  情形, 由定理 1 即可证得。(证毕)

### 3 仿真例子

考虑单输入单输出系统

$$(1 - 0.9q^{-1})y(t) = (1 + 0.5q^{-1})qw(t) + (1 - 0.4q^{-1})v(t)$$

输入  $w(t)$  是 Bernoulli-Gaussian 白噪声<sup>[7]</sup>

$$w(t) = b(t)g(t)$$

其中,  $b(t)$  是取值为 0 和 1 的 Bernoulli 白噪声, 取值概率为  $P(b(t) = 1) = 0.3$ ,  $P(b(t) = 0) = 0.7$ ;  $g(t)$  是零均值、方差为  $\sigma_g^2 = 4.24$  的独立于  $b(t)$  的 Gaussian 白噪声。白噪声  $v(t) = 1.5w(t) + n(t)$ ,  $n(t)$  是零均值、方差为  $\sigma_n^2 = 0.12$  的独立于  $b(t)$  和  $g(t)$  的 Gaussian 白噪声。可求得  $\sigma_w^2 = 1.272$ ,  $S = 1.908$ ,  $\sigma^2 = 2.982$ , 且 ARMA 新息模型为

$$(1 - 0.9q^{-1})y(t) = D\varepsilon(t)$$

其中  $D = 1 + 0.163567q^{-1} - 0.114063q^{-2}$   
 $\sigma_\varepsilon^2 = 6.691054$

取  $N = 0$  和  $N = 1$ , 由推论 1 可求得 Bernoulli-Gaussian 白噪声 Wiener 反卷积滤波器和平滑器为

$$\begin{aligned} D\hat{w}(t|t) &= L_0(1 - 0.9q^{-1})y(t) \\ D\hat{w}(t|t+1) &= L_1(1 - 0.9q^{-1})y(t+1) \end{aligned}$$

带  $L_0 = 0.190105$

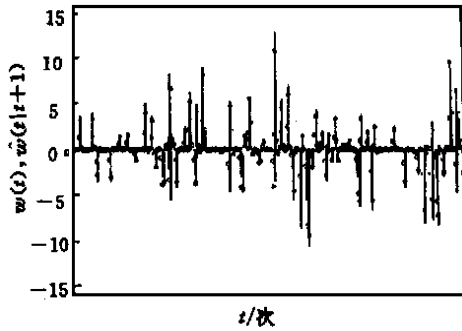


图2 Bernoulli-Gaussian 白噪声  $w(t)$  和 Wiener 反卷积平滑器  $\hat{w}(t|t+1)$

$$L_1 = 0.349114 + 0.190105q^{-1}$$

仿真结果如图 1 和图 2 所示, 其中实线端点为  $w(t)$ , 圆点为  $\hat{w}(t|t)$  或  $\hat{w}(t|t+1)$ 。由仿真结果可以看出平滑器  $\hat{w}(t|t+1)$  比滤波器  $\hat{w}(t|t)$  的精度高, 这与理论分析结果一致。Bernoulli-Gaussian 白噪声是取非零值稀疏的高斯白噪声, 它在石油地震勘探中具有重要的应用背景<sup>[1]</sup>。可用它来模拟油层反射系数序列, 为油层几何形状提供重要信息。

参考文献:

- [1] Mendel J M. White-noise estimators for seismic data processing in oil exploration [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1977, 22(5): 694-706.
- [2] Ahlen A, Sternad M. Optimal deconvolution based on polynomial methods [J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(2): 217-226.
- [3] Sternad M, Ahlen A. The structure and design of realizable decision feedback equalizers for IIR channels with colored noise [J]. IEEE Trans on Information Theory, 1990, 36(4): 848-858.
- [4] Deng Z L, Zhang H S, Liu S J et al. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems [J]. Automatica, 1996, 32(2): 199-216.
- [5] Gevers M, Wouters W R E. An innovations approach to the discrete-time stochastic realization problem [J]. Journal A, 1978, (2): 90-109.
- [6] Deng Z L, Liu Y M. Descriptor Kalman estimators [J]. Int J of Systems Science, 1990, 30(11): 1205-1212.
- [7] Kormylo J, Mendel M. Maximum likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes [J]. IEEE Trans on Information Theory, 1982, 28(3): 482-488.