

文章编号: 1001-0920(2001)04-0497-03

2-D 奇异线性离散系统渐近稳定性的 一类 Lyapunov 方法

陈雪如, 杨成梧

(南京理工大学 动力工程学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 引入 2-D 奇异一般离散状态空间模型的 Lyapunov 方程, 探讨了该模型的渐近稳定性、特征多项式的根以及 2-D Lyapunov 矩阵方程间的关系, 给出了系统渐近稳定性的充分条件。

关键词: 2-D 系统; 奇异系统; 渐近稳定; Lyapunov 方法

中图分类号: O 231 **文献标识码:** A

A Lyapunov Method for Asymptotic Stability of 2-D Singular Linear Discrete Systems

CH EN Xue-ru, YANG Cheng-wu

(School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: A Lyapunov equation for 2-D singular general discrete state-space model is introduced. The relationship between asymptotic stability, the roots of the characteristic polynomial and the 2-D matrix Lyapunov equation is studied. Sufficient conditions for asymptotic stability of the system are presented.

Key words: two-dimensional systems; singular systems; asymptotic stability; Lyapunov method

1 引言

2-D 线性离散状态空间理论日益受到重视, 并且作为状态空间理论重要内容之一的稳定性研究也取得了丰硕的成果^[1]。但现有关于 2-D 系统稳定性的讨论大都考虑 2-D 正则系统, 关于 2-D 奇异离散系统稳定性的研究刚刚开始。文献[2]提出了 2-D 奇异系统渐近稳定的概念, 并给出了渐近稳定的判据。现有的 2-D 系统稳定性判据通常都归结为在单位圆柱 $|z_1| = 1, |z_2| = 1$ (或 $0 < |z_1| = 1, 0 < |z_2| < 1$) 内, 判别其稳定性检验多项式是否存在零点的问题, 这在实际操作中是相当困难的。因此, 通过

Lyapunov 方法研究 2-D 离散系统的稳定性显得很有意义。

本文探讨了 2-D 奇异一般模型的渐近稳定性、特征多项式的根以及 2-D Lyapunov 矩阵方程间的关系, 给出了系统渐近稳定的充分条件, 从而较好地解决了 2-D 奇异离散系统渐近稳定性的判别问题。

2 渐近稳定性

考虑如下 2-D 奇异系数线性离散系统

$$\begin{aligned} E x(i+1, j+1) = \\ A_{0x}(i, j) + A_{1x}(i+1, j) + A_{2x}(i, j+1) + \end{aligned}$$

收稿日期: 2000-04-17; 修回日期: 2000-11-17

作者简介: 陈雪如(1965—), 女, 江西南昌人, 副教授, 博士生, 从事 2-D 线性离散系统、广义系统等研究; 杨成梧(1936—), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统理论、非线性理论、H 控制等研究。

$$\begin{aligned}
 & B_{0u}(i, j) + B_{1u}(i + 1, j) + \\
 & B_{2u}(i, j + 1)
 \end{aligned} \tag{1}$$

边界条件为

$$x(i, 0), \quad x(0, j) \tag{2}$$

其中, $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ 为二元整值坐标; $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$, $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ 分别为状态和输入向量; $A_k, B_k (k = 0, 1, 2), E$ 分别为适当维数的常值实矩阵; $\det E = 0, E, A_i$ 满足正则约束条件

$$\det(z_1 z_2 E - z_1 A_1 - z_2 A_2 - A_0) \neq 0$$

即存在数对 $(-\lambda, -\mu)$, 使得

$$\det(\lambda \mu E + \lambda A_1 + \mu A_2 - A_0) = 0$$

在方程(1)中, 如果将奇异阵 E 换成单位阵 I_n , 则此时的 2-D 系统就是正则系统, 有如下结论:

定理 1^[3] 2-D 正则系统渐近稳定的充要条件为

$$\begin{aligned}
 & \det(I - z_1 A_1 - z_2 A_2 - z_1 z_2 A_0) \neq 0 \\
 & |z_1| < 1, \quad |z_2| < 1
 \end{aligned} \tag{3}$$

定理 2 2-D 正则系统渐近稳定的充分条件为: 存在正定矩阵 P, W_1, W_2, W_3, R , 使得 Q 正定, 且

$$R - W_1 - W_2 - W_3 = 0 \tag{4}$$

这里

$$\begin{aligned}
 Q = & \text{diag}\{(P^{1/2})^T W_1 P^{1/2}, (P^{1/2})^T W_2 P^{1/2}, \\
 & (P^{1/2})^T W_3 P^{1/2}\} - A^T (P^{1/2})^T R P^{1/2} A
 \end{aligned} \tag{5}$$

其中, $A = [A_0, A_1, A_2], P^{1/2}$ 表示 P 的平方根矩阵。

证明 采用反证法: 如果此时的 2-D 系统不是渐近稳定的, 则由定理 1, 存在 $(z_{10}, z_{20}) (|z_{10}| = 1, |z_{20}| = 1)$, 使得

$$\det(I - z_{10} A_1 - z_{20} A_2 - z_{10} z_{20} A_0) = 0$$

故存在 $S_0 \neq 0$, 使得

$$\begin{aligned}
 S_0 = & (z_{10} A_1 + z_{20} A_2 + z_{10} z_{20} A_0) S_0 = \\
 & [A_0, A_1, A_2] \begin{bmatrix} z_{10} z_{20} I \\ z_{10} I \\ z_{20} I \end{bmatrix} S_0 = A \begin{bmatrix} z_{10} z_{20} I \\ z_{10} I \\ z_{20} I \end{bmatrix} S_0
 \end{aligned} \tag{6}$$

用 S_0^* 表示 S_0 的复共轭转置, 并记 $S_0^T = S_0^T [z_{10} z_{20} I \quad z_{10} I \quad z_{20} I]$, 由式(5)和(6)可得

$$\begin{aligned}
 & S_0^* (P^{1/2})^T R P^{1/2} S_0 = \\
 & S_0^* [|z_{10}|^2 |z_{20}|^2 (P^{1/2})^T W_1 P^{1/2} + |z_{10}|^2 \times \\
 & (P^{1/2})^T W_2 P^{1/2} + |z_{20}|^2 (P^{1/2})^T W_3 P^{1/2}] S_0 - S_0^* Q S_0 \\
 & \text{即} \\
 & S_0^* (P^{1/2})^T [R - |z_{10}|^2 |z_{20}|^2 W_1 - |z_{10}|^2 W_2 - \\
 & |z_{20}|^2 W_3] P^{1/2} S_0 = - S_0^* Q S_0
 \end{aligned} \tag{7}$$

显然, $S_0^* Q S_0 < 0$, (否则由式(6)可得 $S_0 = 0$, 矛盾), 故式(7)右边满足 $- S_0^* Q S_0 < 0$, 而由 $|z_{10}| = 1, |z_{20}| = 1$ 及式(4), 式(7)左边 $= 0$ 。如此矛盾, 故此时的 2-D 系统是渐近稳定的。(证毕)

定理 3^[3] 设 $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 2-D 正则系统的状态系数阵, 令

$$A_c = \begin{bmatrix} A_1 & A_0 + A_1 A_2 \\ I & A_2 \end{bmatrix}$$

则 2-D 正则系统是渐近稳定的充分条件为: Lyapunov 方程 $P - A_c^T P A_c = Q$ 存在对称正定解 $P > 0, Q > 0$, 且 $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}, P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, 2$ 。

3 2-D 奇异系统的 Lyapunov 矩阵方程

定理 4^[2] 2-D 奇异系统(1)渐近稳定的充要条件为稳定性检验多项式

$$\begin{aligned}
 p(z_1, z_2) = & \det(E - z_1 A_1 - z_2 A_2 - z_1 z_2 A_0) \neq 0 \\
 & 0 < |z_1| < 1, \quad 0 < |z_2| < 1
 \end{aligned} \tag{8}$$

考虑 2-D 奇异系统(1)的 Lyapunov 方程, 记 $\Omega = (\lambda \mu E + \lambda A_1 + \mu A_2 - A_0)^{-1}$, 如果集合

$\{(-\lambda, -\mu) \mid \det(\lambda \mu E + \lambda A_1 + \mu A_2 - A_0) \neq 0, |\lambda| < 1, |\mu| < 1\}$ 非空。则构造矩阵

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_0 = & -\Omega E, \quad \hat{A}_1 = \Omega(A_1 + \mu E) \\
 \hat{A}_2 = & \Omega(A_2 + \lambda E), \quad \hat{A}_0 = (|\lambda| - 1)(|\mu| - 1)\hat{A}_0 \\
 \hat{A}_1 = & (|\lambda| - 1)\hat{A}_1, \quad \hat{A}_2 = (|\mu| - 1)\hat{A}_2
 \end{aligned}$$

并记

$$\begin{aligned}
 w_1 = & (z_2 + \mu)^{-1}, \quad w_2 = (z_1 + \lambda)^{-1} \\
 \tilde{w}_1 = & w_1(|\mu| - 1), \quad \tilde{w}_2 = w_2(|\lambda| - 1) \\
 \tilde{A}_c = & \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \\ I & \tilde{A}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

则有如下定理:

定理 5 2-D 奇异系统(1)渐近稳定的充分条件为: 存在正定矩阵 P, W_1, W_2, W_3, R , 使得 Q 正定, 且 $R - W_1 - W_2 - W_3 = 0$ 。这里

$$\begin{aligned}
 Q = & \text{diag}\{(P^{1/2})^T W_1 P^{1/2}, (P^{1/2})^T W_2 P^{1/2}, \\
 & (P^{1/2})^T W_3 P^{1/2}\} - \tilde{A}^T (P^{1/2})^T R P^{1/2} \tilde{A} \\
 & \tilde{A} = [\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2]
 \end{aligned}$$

证明 由假设及定理 2 知, 当 $0 < |\tilde{w}_1| < 1, 0 < |\tilde{w}_2| < 1$ 时, 有

$$\det[I - \tilde{w}_2 \tilde{A}_2 - \tilde{w}_1 \tilde{A}_1 - \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \tilde{A}_0] \neq 0$$

即当 $0 < |w_1^{-1}(|\mu| - 1)^{-1}|$ $1, 0 < |w_2^{-1}(|\lambda| - 1)^{-1}|$ 1 时, 有

$$\det[I - w_2^{-1}\hat{A}_1 - w_1^{-1}\hat{A}_2 - w_1^{-1}w_2^{-1}\hat{A}_0] = 0 \quad (9)$$

由于

$$\Omega^{-1}(I - w_2^{-1}\hat{A}_1 - w_1^{-1}\hat{A}_2 - w_1^{-1}w_2^{-1}\hat{A}_0) = z_1z_2E - z_1A_1 - z_2A_2 - A_0$$

由该式及式(9) 知, 当 $0 < |z_1^{-1}|$ $1, 0 < |z_2^{-1}|$ 1 时, 有

$$\det[E - z_2^{-1}A_1 - z_1^{-1}A_2 - z_1^{-1}z_2^{-1}A_0] = \det\Omega^{-1}\det(I - w_2^{-1}\hat{A}_1 - w_1^{-1}\hat{A}_2 - w_1^{-1}w_2^{-1}\hat{A}_0) \times z_1^{-n}z_2^{-n} = 0$$

由定理 4 知, 奇异系统 (1) 是渐近稳定的。(证毕)

由定理 3 及定理 5 的证明过程可得如下定理:

定理 6 2-D 奇异系统渐近稳定的充分条件为:

Lyapunov 方程 $P - \tilde{A}^T P \tilde{A} c = Q$ 存在对称正定解 $P > 0, Q > 0$, 且 $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}, P_i \in R^{n \times n}, i = 1, 2$.

定理 7^[4] 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, A_{kk} \in R^{n_k}$

($k = 1, 2$), 若矩阵 $I - \text{ABS}(A)$ 的所有主子式均为正, 则存在块对角阵 $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}, P_k \in R^{n_k} (k = 1, 2)$, 使矩阵 $P - A^T P A > 0$ 。这里 $\text{ABS}(A)$ 表示矩阵 A 中的每个元素取绝对值后构成的矩阵。

4 算 例

检验系数阵

$$E = \begin{bmatrix} -\frac{89}{30} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{191}{90} & \frac{7}{30} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{71}{45} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{119}{60} & -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的 2-D 奇异系统的渐近稳定性。

选取 $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = \frac{2}{3}$, 则

$$\Omega^{-1} = \lambda\mu E + \lambda A_1 + \mu A_2 - A_0 = I_2$$

故

$$\hat{A}_0 = -E = \begin{bmatrix} \frac{89}{30} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{A}_1 =$$

$$A_1 + \frac{2}{3}E = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_2 = A_2 - \frac{1}{2}E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$\tilde{A}_0 = (|\lambda| - 1)(|\mu| - 1)\hat{A}_0 = \frac{1}{6}\hat{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{89}{180} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = (|\lambda| - 1)\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = (|\mu| - 1)\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_c = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{80} \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{20} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{12} & 0 \end{array} \right]$$

由于 $I - \text{ABS}(\tilde{A}_c)$ 满足定理 7 的条件, 由定理 6 知, 该 2-D 奇异系统是渐近稳定的。

参考文献:

- [1] 杨成梧, 邹云. 2-D 线性离散系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [2] 陈雪如, 邹云, 杨成梧. 2-D 奇异离散系统的内部稳定性[J]. 南京理工大学学报, 2000, 24(2): 156-159.
- [3] 杨成梧, 孙建中, 邹云. 一般 2-D 线性常系数离散状态空间模型渐近稳定性的一类 Lyapunov 方法[J]. 控制理论与应用, 1993, 10(1): 87-92.
- [4] Moylan P J. Matrices with positive principal minors[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1977, 17: 53-58.