文章编号: 1001-0920(2001)04-0398-06

复杂系统的质量生存决策

叶明确, 张世英
(天津大学 管理学院, 天津 300072)

摘 要: 为进一步刻画复杂系统的有限理性决策, 在复杂系统生存决策的基础上引入生存质量函数, 提出通道质量生存决策 下限质量生存决策及极大下限质量生存决策等概念, 建立起复杂系统的质量生存决策体系, 并给出了各类质量生存策略存在的充要条件。

关键词: 复杂系统; 生存决策; 生存质量函数
中图分类号: N94 文献标识码: A

Quality-viability Decision of Complex Systems

YE Ming-que, ZHANG Shi-ying
(Management School of Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The viability quality function is introduced to characterize the limited rational decision. New concepts of quality-viability decisions are proposed, including passageway quality-viability decisions, downward limited quality-viability decision and maximum downward limited quality-viability decision. On the basis of viability decision theory, a quality-viability decision framework of complex systems is established. Necessary and sufficient conditions for the existence of quality-viability strategies are given.

Key words: complex systems; viability decision; viability quality function

1 引 言

复杂系统复杂性本质决定了最优决策的不可实现性, 对此, 法国数学家 Aubin[1]提出一种基于生存理论的生存决策。生存决策相对于最优决策的一个显著的不同点是: 系统没有一个最优目标, 而是仅划分为两种生存状态(生存和死亡); 决策目标不再是寻求系统的最优解和目标函数的极值, 而是寻求系统的生存解, 以保证系统的生存性。生存决策的提出为复杂系统决策研究开辟了一条新的途径, 在决策思想和方法上引起了根本性的变革。但是我们也注意到, 在实际决策中, 虽然系统最优不能达到, 但决策者一般也不会仅仅满足于系统生存。

本文提出了质量生存决策的概念, 通过引入生存质量函数进一步刻画系统的生存状态, 使决策者有一个较为具体的决策依据。质量生存决策的目标是寻求系统的质量生存解, 它不仅要保证系统的生存性, 而且要满足一定的生存质量要求。质量生存解实际上是一种满意解, 而质量生存决策实际上是一种满意决策。

收稿日期: 2000-07-28; 修回日期: 2000-12-27
基金项目: 国家自然科学基金项目(69874028)
作者简介: 叶明确(1974—), 女, 安徽滁州人, 博士生, 从事社会经济系统分析等研究; 张世英(1936—), 男, 北京人, 教授, 博士生导师, 从事社会经济系统建模与调控等研究。

2　生存质量函数

生存质量是系统生存状态水平的度量与表征,用正实数表示。生存质量函数是映射到生存质量空间的函数, 它根据因变量的不同可分为两类: Ⅰ型生存质量函数和 Ⅱ 型生存质量函数。

定义 **1**(Ⅰ型生存质量函数)　称从系统状态空间 X 映射到生存质量空间 R_+ (R_+ 为不包含 $+\infty$ 的正实数) 的函数 $V: x \in X \mapsto V(x) \in R_+$ 为定义在子集 $M \subset X$ 上的 Ⅰ 型生存质量函数。这里 $M = \{x \in X \mid V(x) > 0\}$, 并记 V 的定义域 $\mathrm{Dom}(V) = M$。

再定义生存质量函数的逆映射 V^{-1}, 它表示:

1) 对于一个点 $y \in R_+$, $V^{-1}(y)$ 是满足所有 $V(x) = y$ 的 X 中的点 x 的集合, 即

$$V^{-1}(y) = \{x \in X \mid V(x) = y\}$$

2) 对于一个集合 $A \subset R_+$, $V^{-1}(A)$ 是满足所有 $V(x) \in A$ 的 X 中的点 x 的集合, 即

$$V^{-1}(A) = \{x \in X \mid V(x) \in A\}$$

定义 **2**(Ⅱ 型生存质量函数)　称从系统状态空间 X 与系统状态速度空间 X 的积空间映射到生存质量空间 R_+ (R_+ 为不包含 $+\infty$ 的正实数) 的函数 $U: (x, v) \in X \times X \mapsto U(x, v) \in R_+$ 为定义在子集 $N \subset X \times X$ 上的 Ⅱ 型生存质量函数。这里 $N = \{(x, v) \in X \times X \mid U(x, v) > 0\}$, 并记 U 的定义域 $\mathrm{Dom}(U) = N$。

上述函数空间定义为生存质量函数空间, 简记为 $\boldsymbol{U}(X)$。并记 $\boldsymbol{U}_0(X)$ 为 $\boldsymbol{U}(X)$ 中满足以下条件的生存质量函数集合全体:

1) U 是凹函数, 任取 $w \in R_+ \setminus \{0\}$, U 的 w 割集 $[U]^w \triangleq \{(x, v) \in X \times X \mid U(x, v) \geq w\}$ 是闭凸集;

2) U 是上半连续的;

3) U 的定义域 $N = \{(x, v) \in X \times X \mid U(x, v) > 0\}$ 是紧集。

由定义可见, Ⅰ 型生存质量函数与 Ⅱ 型生存质量函数的主要差别在于 Ⅰ 型生存质量只与系统状态有关, 而 Ⅱ 型生存质量不仅与系统状态有关, 而且与状态的变化有关。

3　Ⅰ型质量生存和Ⅰ型质量生存定理

3.1　两类 Ⅰ 型质量生存的定义

对于非确定性的复杂系统, 其演化规律用微分包含描述为

$$\text{a.e. } t \geq 0, \quad x'(t) \in F(x(t)), \; x(0) = x_0 \quad (1)$$

其中, F 是从系统状态空间 X 映射到系统状态速度空间 X 的集值映射, $x(0)$ 为初始条件, a.e. 是 almost everywhere(几乎处处) 的缩写。如果 $x(\cdot)$ 是满足式(1) 的绝对连续函数, 则称 $x(\cdot)$ 是微分包含(1) 的解(或轨线)。如果微分包含至少存在一个解, 使得其上的 Ⅰ 型生存质量满足特定的生存要求, 则称系统是 Ⅰ 型质量生存的。根据生存要求的不同, 又可分为通道质量生存和下限质量生存。下面给出这两种不同生存要求下的质量生存定义。

定义 **3**(Ⅰ 型通道质量生存)　给定生存质量通道 P, 即一个从时间域 $[0, +\infty)$ 到生存质量空间 R_+ 上的集值映射 $P: t \in [0, \infty) \mapsto P(t) \subset R_+$, 如果微分包含(1) 至少存在一个解 $x(\cdot)$, 使得其上的 Ⅰ 型生存质量 $V(x(\cdot))$ 满足

$$\forall t \in [0, \infty), \quad V(x(t)) \in P(t)$$
$$V(x_0) \in P(0) \quad (2)$$

则称 x_0 满足 Ⅰ 型通道质量生存要求(或称 x_0 是通道质量生存的)。若起始点 x_0 是 $\mathrm{Dom}(V)$ 中的任意点, 则称微分包含(1) 满足在 F 下的 Ⅰ 型通道质量生存要求(或称系统是通道质量生存的)。

由定义 3 可见, Ⅰ 型通道质量生存要求系统运行的状态轨线上各点的生存质量处于一个给定的范围内, 即轨线的生存质量在通道 $P(t)$ 内是生存的。Ⅰ 型通道质量生存决策可用于一般经济系统中对风险的认可和限制, 以及在非均衡经济系统中对供需差的控制。

定义 **4**(Ⅰ 型下限质量生存)　给定生存质量下限函数 $w(\cdot): t \in [0, \infty) \mapsto w(t) \in R_+$, 它是微分方程 $w'(t) = \rho(w(t))$ 的解, 其中 $\rho: R_+ \to R$ 是给定的线性增长的连续函数。如果对 $\forall x_0 \in X$, 微分包含(1) 至少存在一个解 $x(\cdot)$, 使得其上的 Ⅰ 型生存质量 $V(x(\cdot))$ 满足

$$\forall t \geq 0, \quad V(x(t)) \geq w(t), \quad V(x_0) = w(0) \quad (3)$$

则称微分包含系统(1) 满足 Ⅰ 型下限质量生存要求(或是下限质量生存的)。

由定义 4 可见, Ⅰ 型下限质量生存要求系统运行轨线各点的生存质量大于给定的生存质量下限。当经济系统中的决策变量是一些只需考虑下限的变量(如回报率、利润等变量) 时, 就需要考虑下限质量生存问题。

3.2　通道质量生存定理

对于微分包含系统, Aubin 给出了如下的基本

生存定理。本文以下定理都是在此基础上发展起来的。

定理1[1](基本生存定理) 假定:

1) $F: X \to X$ 是一个Marchaud映射;

2) K 是闭集;

则 K 在 F 下是全局生存的,当且仅当 K 是 F 的生存域。这里的全局生存是指对任何初始状态 $x_0 \in K$,系统至少存在一个从 x_0 出发,满足 $\forall t \geq 0, x(t) \in K$ 的解。生存域是指 K 满足 $\forall x \in K, F(x) \cap T_K(x) \neq \varnothing$。$T_K(x)$ 是 K 在 x 点处的相依锥,它是集合 K 的"内向"。

定义5(质量生存通道) 对于具有 Ⅰ 型生存质量函数 V 的微分包含系统(1),如果集值映射 $Q: t \in [0, +\infty) \mapsto Q(t) \subset R_+$,满足

$$\begin{cases} \forall t \in [0, +\infty), \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(V) \\ V(x) \in Q(t), \quad F(x) \cap DV^{-1}Q(t,x)(1) \neq \varnothing \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$DV^{-1}Q(t,x)(1) \triangleq \left\{ u \in X \,\middle|\, \liminf_{h \to 0^+} d\left[u, \frac{V^{-1}[Q(t+h)] - x}{h}\right] = 0 \right\} \tag{5}$$

式中 d 是距离函数,$d(u,K) = \inf_{y \in K} \| u - y \|$ 表示 u 到集合 K 的距离。则称集值映射 Q 为微分包含系统(1)的质量生存通道。

定理2(通道质量生存定理) 如果满足下列条件:

1) 集值映射 $F: X \to X$ 是一个Marchaud映射;

2) 生存质量函数 V 的定义域 $M = \mathrm{Dom}(V)$ 为闭集;

3) 生存质量函数 V 在定义域上为连续函数;

4) 集值映射 Q 的图 $\mathrm{Graph}(Q)$ 是闭的。

则微分包含系统(1)具有通道质量生存特性(或是通道质量生存的)的充分必要条件是集值映射 Q 为质量生存通道。

证明 首先定义从时间域 $[0, +\infty)$ 到度量空间 X 上的集值映射 $C: t \in [0, +\infty) \mapsto C(t) \subset X$,其中 $C(t) = \{x \in X \mid V(x) \in Q(t)\}$;然后证明集值映射 C 是闭的。

设 $(t_n, x_n) \in \mathrm{Graph}(C)$,且 $t_n \to t, x_n \to x$。要证明集值映射 C 是闭的,就要证明 $(t,x) \in \mathrm{Graph}(C)$。

1) 由定理2条件2)知 M 是闭集,所以 $x_n \in M \to x \in M$。

2) 由定理2条件3)知 V 在定义域上为连续函数,所以 $l_n = V(x_n) \to l = V(x)$。由 $(t_n, x_n) \in \mathrm{Graph}(C)$,即 $l_n = V(x_n) \in Q(t_n)$,从而 $(t_n, l_n) \in \mathrm{Graph}(Q)$。

3) 由定理2条件4)知,集值映射 Q 的图 $\mathrm{Graph}(Q)$ 是闭的,所以 $(t,l) \in \mathrm{Graph}(Q)$,即 $l \in Q(t)$;所以 $V(x) \in Q(t)$,$(t,x) \in \mathrm{Graph}(C)$;所以得证集值映射 C 的图 $\mathrm{Graph}(C)$ 是闭的。

引入一个从 $\mathrm{Graph}(C)$ 到 $R_+ \times X$ 的集值映射 G

$$G(s,x) = \{1\} \times F(x), \quad s \in [0, +\infty) \tag{6}$$

由定理2条件1)及式(6)知,集值映射 G 是Marchaud映射。可以发现 $(s(\cdot), x(\cdot))$ 是微分包含

$$\text{a.e.} \quad t, \ (s'(\cdot), y'(\cdot)) \in G(s(t), y(t)) \tag{7}$$

起始于 x_0 的解,当且仅当函数 $x(\cdot)$ 是微分包含 $x'(\cdot) \in F(x(t))$ 起始于 x_0 的解。注意到微分包含系统(1)是通道质量生存的,当且仅当 C 的图 $\mathrm{Graph}(C)$ 在集值映射 G 下生存。根据生存定理1,当 C 的图是闭的且 G 是Marchaud映射时,$\mathrm{Graph}(C)$ 在集值映射 G 下生存的充分必要条件是

$$G(s,x) \cap T_{\mathrm{Graph}(C)}(s,x) \neq \varnothing \tag{8}$$

即当 $s \in [0, +\infty)$ 时

$$[\{1\} \times F(x)] \cap [\{1\} \times DV^{-1}Q(s,x)(1)] \neq \varnothing \tag{9}$$

从而得到式(4),定理得证。

3.3 下限质量生存定理

由下限质量生存的定义,可以看出下限质量生存与李雅普诺夫函数性质[2,3]相似。仿照李雅普诺夫函数性质的证明过程[4]给出如下证明。

首先给出定理证明中涉及的一些基本概念。函数 V 的上图 $\epsilon_p(V) \triangleq \{(x,\lambda) \in X \times R_+ \mid V(x) \leq \lambda\}$,函数 V 的下图 $H_p(V) \triangleq \{(x,\lambda) \in X \times R_+ \mid V(x) \geq \lambda\} = -\epsilon_p(-V)$。由 V 的上、下图定义可见,函数 V 的图是其上、下图的交集。

命题1 对于函数 $V: x \in X \mapsto V(x) \in R_+$ 及 $x \in \mathrm{Dom}(V)$,则有 V 的下图在 $(x, V(x))$ 处的相依锥是函数 $D_\downarrow V(x)$ 的下图,即

$$H_p(D_\downarrow V(x)) = T_{H_p(V)}(x, V(x)) \tag{10}$$

等价于

$$\forall v \in X$$

$$D_\downarrow V(x)(v) \triangleq \limsup_{h \to 0+, v' \to v} \frac{V(x + hv') - V(x)}{h} \tag{11}$$

证明 利用关系式 $H_p(V) = -\epsilon_p(-V)$,从文献[1]的引理8.1.2可直接导出。

定义6(相依下导数与相依下可导) 对于函数

$V: x \in X \mid \to V(x) \in R_+$ 及 $x \in \mathrm{Dom}(V)$, 称函数 $D_\downarrow V(x)$ 是 V 在 x 点是相依下导数。称函数 V 在 x 点是相依下可导的, 如果对 $\forall v \in X$, 函数 V 的相依下导数 $D_\downarrow V(x)(v)$ 满足 $D_\downarrow V(x)(v) > -\infty$, 且 $D_\downarrow V(x)(v) < +\infty$。称函数 V 是相依下可导的, 如果对所有 $x \in X$, $\forall v \in X$, 函数 V 的相依下导数 $D_\downarrow V(x)(v)$ 满足 $D_\downarrow V(x)(v) > -\infty$, 且 $D_\downarrow V(x)(v) < +\infty$。

定义 **7**(质量生存下限函数)　对于具有 Ⅰ 型生存质量函数 V 的微分包含系统(1), 如果相依下可导的生存质量函数 V 是相依 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\forall x \in X, \quad \sup_{v \in F(x)} D_\downarrow V(x)(v) - \rho(V(x)) \geq 0 \tag{12}$$

的解, 则称 V 为微分包含系统(1) 的 Ⅰ 型质量生存下限函数。

定理 **3**(下限质量生存定理)　如果满足下列条件:

1) 集值映射 $F: X \to X$ 是一个 Marchaud 映射;

2) 生存质量函数 V 相依下可导;

3) 生存质量函数 V 为上半连续函数。

则微分包含系统(1) 满足下限质量生存要求的充分必要条件是 V 为微分包含系统(1) 的质量生存下限函数。

证明　令 $G(x, w) = F(x) \times \{\rho(w)\}$, 则微分包含系统(1) 是下限质量生存的充分必要条件是系统 $(x'(t), w(t)) \in G(x(t), w(t))$ 对初始点具有在 $K = H_p(V)$ 中的生存解, 其中 $H_p(V)$ 是 V 函数的下图 $H_p(V) \triangleq \{(x, \lambda) \in X \times R \mid V(x) \geq \lambda\}$。下面证明 K 是 G 的生存域的充分必要条件是 V 为微分包含系统(1) 的 Ⅰ 型质量生存下限函数。

1) 必要条件: 因为 K 是 G 的生存域, 取点 $(x, V(x))$, 则对于某些 $v \in F(x)$, 有 $(v, \rho(V(x))) \in T_K(x, V(x))$。由命题 1 知, $T_K(x, V(x)) = H_p(D_\downarrow V(x))$, 从而 $D_\downarrow(x)(v) \geq \rho(V(x))$, 即 $D_\downarrow V(x)(v) \to \rho(V(x)) \geq 0$。从而式(12) 成立, V 是 Ⅰ 型系统的质量生存下限函数。

2) 充分条件: V 为 I 型系统的质量生存下限函数, 则有 $\sup_{v \in F(x)} D_\downarrow V(x)(v) - \rho(V(x)) \geq 0$。由于 $F(x)$ 是紧的, 且 v 上半连续, 则式(12) 意味着存在 $v \in F(x)$, 使得 $(v, \rho(V(x))) \in H_p(D_\downarrow V(x)) = T_K(x, V(x))$, 即 $(x + h_n v_n, V(x) + h_n s_n) \in K$, 其中 $h_n \to 0, v_n \to v, s_n \to \rho(V(x))$。

下面证明当 $w < V(x)$ 时, $(v, \rho(w)) \in T_K(x, w)$。由

$$\begin{aligned}
&(x + h_n v_n, w + h_n \rho(w)) = \\
&(x + h_n v_n, V(x) + h_n s_n) + \\
&(0, w - V(x) + h_n(\rho(w) - \rho(V(x)))) \in \\
&K + \{0\} \times R_- \in K
\end{aligned}$$

所以 $(v, \rho(w)) \in T_K(x, w)$。进而 K 是 G 的生存域。综合条件 1) 和 2), 定理得证。

4　II 型质量生存和 II 型质量生存定理

由定义 1 和定义 2 可以看出, II 型生存质量函数与 Ⅰ 型生存质量函数有着本质的不同。在一阶微分包含系统中, Ⅰ 型生存质量函数不直接影响系统的演化, 而 II 型生存质量函数由于因变量包括了系统状态速度分量而直接影响了系统的演化。本节讨论当决策者对 II 型生存质量函数提出生存质量要求时的质量生存决策问题。

4.1　II 型下限质量生存下的质量微分包含

对于状态变量 $x \in X$, 寻求速度变量 $v \in X$, 使得其 II 型生存质量大于给定的生存质量值 $w \in R_+$, 即 $U(x, v) \geq w$。此问题可等价转化为寻求集值映射 F_w 在 x 点的值, 其中集值映射 F_w 定义如下:

定义 **8**(集值映射 F_w)　集值映射 F_w 是从有限维系统状态空间 X 映射到系统状态速度空间 X 的集值映射。该映射的图为

$$\mathrm{Graph}(F_w) = [U]^w \triangleq \begin{cases} \{(x, v) \in X \times X \mid U(x, v) \geq w\}, & w > 0 \\ \overline{\{(x, v) \in X \times X \mid U(x, v) \geq 0\}}, & w = 0 \end{cases}$$

该映射的定义域为

$$\mathrm{Dom}(F_w) = \begin{cases} \{x \in X \mid \exists v \in X, U(x, v) \geq w\}, & w > 0 \\ \overline{\{x \in X \mid \exists v \in X, U(x, v) \geq 0\}}, & w = 0 \end{cases}$$

比较集值映射 F_w 与微分包含(1) 中集值映射 F, 可以看出集值映射 F_w 随着质量要求 w 的变化而变化, 它的图随着质量要求的增加而缩小, 体现出质量要求对系统运行的影响。由集值映射 F_w 所确定的微分包含表达式丰富了微分包含(1) 的含义。

当 w 是时间函数时, 可得基于 II 型生存质量函数的集值映射 F_W^t 及由 F_W^t 确定的微分包含表达式如下:

定义 **9**(集值映射 F_W^t 及质量微分包含)　集值映射 F_W^t 是从时间域 $[0, +\infty)$ 与有限维系统状态空间 X 的积空间映射到系统状态速度空间 X 的二元

集值映射 $F^t_W:[0,+\infty)\times X\to X$。该映射的图为

$$\mathrm{Graph}(F^t_W)=\begin{cases}\{(t,x,v)\in[0,+\infty)\times X\times X \mid U(x,v)\geq w(t)\}, & w(t)>0\\ \{(t,x,v)\in[0,+\infty)\times X\times X \mid (x,v)\in \mathrm{Dom}(U)\}, & w(t)=0\end{cases}$$

该映射的定义域为

$$\mathrm{Dom}(F^t_W)=[0,+\infty)\times \mathrm{Dom}(F_{w(t)})$$

并且定义系统的质量微分包含为

$$\text{a.e. } t\geq 0,\quad (x(t),x'(t))\in F^t_w(t,x(t)) \tag{13}$$

为以后证明的需要,在此定义一个与集值映射 $F^t_W:[0,+\infty)\times X\to X$ 的图相同的一元集值映射 $\tilde{F}^t_w:[0,+\infty)\to X\times X$, $\mathrm{Graph}(\tilde{F}^t_w)=\mathrm{Graph}(F^t_w)$。

4.2 Ⅱ型下限质量生存及Ⅱ型下限质量生存定理

定义 10(Ⅱ型下限质量生存) 对于一个具有生存质量函数 U 的微分包含系统和时间函数 $w:t\in[0,+\infty)\mapsto w(t)\in R_+$,如果对子集 $K\subset X$, $\forall x_0\in K$,对由上述集值映射 F^t_W 定义的系统的质量微分包含(13)至少存在一个解 $x(\cdot)$,使得

$$\forall t\geq 0,\quad x(t)\in K \tag{14}$$

则称子集 K 具有Ⅱ型下限质量生存特性(或 K 是Ⅱ型下限质量生存的)。

定义 11(Ⅱ型下限质量生存的生存域) 对于一个具有生存质量函数 U 的微分包含系统和时间函数 $w(\cdot)$,称子集 $K\subset \mathrm{Dom}(U)$ 为Ⅱ型下限质量生存域,如果 $\forall x\in K$, $\exists v\in T_K(x)$,使得

$$\forall t\geq 0,\quad \begin{cases}U(x,v)\geq w(t), & w(t)>0\\ (x,v)\in \mathrm{Dom}(U), & w(t)=0\end{cases}$$

即

$$\forall x\in K,\quad \forall t\geq 0,\quad F^t_w(t,x)\cap T_K(x)\neq\varnothing \tag{15}$$

下面给出有限维空间 R^n 中的Ⅱ型下限质量生存定理。首先给出在定理证明中用到的概念和一些命题。

定义 12[1](上拟连续映射) 设 $F:X\to Y$ 为 X 到 Y 的集值映射,并设 Y^* 为 Y 的对偶空间。则对每一 Y 的子集 A,可定义 A 的支撑函数 $\sigma(A):Y^*\to R\cup\{+\infty\}$ 为

$$\forall p\in Y^*,\quad \sigma(A)(p)\triangleq \sup_{y\in A}\langle p,y\rangle$$

称 F 是上拟连续映射,是指对任何 $\forall p\in Y^*$,数值函数 $x\in X\mapsto \sigma(F(x))(p)$ 为上半连续函数。

比较生存质量函数空间 $\boldsymbol{U}_0(R^n)$ 与模糊数空间 E^1,可以看出二者的不同点仅在于 $U\in\boldsymbol{U}_0(R^n)$ 不是正规模糊集。所以类似于文献[5]中的模糊数,$U\in\boldsymbol{U}_0(R^n)$ 有如下性质:

命题 2 若Ⅱ型生存质量函数 $U\in\boldsymbol{U}_0(R_n)$,则:

1) $\exists w\in R_+$, $[U]^w$ 为有界闭凸集,即紧凸集;

2) 若 $0\leq w_1\leq w_2$,则 $[U]^{w_2}\subset[U]^{w_1}$;

3) 若正数 w_n 非降收敛于 $w\in R_+\setminus\{0\}$,则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[U]^{w_n}=[U]^w$。

命题 3[1] 具有闭凸值的上拟连续集值映射是闭映射。

命题 4[6] 设 $F:X\to Y$ 为 X 到 Y 的集值映射;

1) 若 F 是上半连续映射且 F 具有闭值,则 F 是闭映射;

2) 若 F 是闭映射,F 的定义域是闭集且 Y 是紧空间,则 F 是上半连续映射。

命题 5[6] 设 $F:X\to Y$ 为 X 到 Y 的闭集值映射,$r:X\mapsto R$ 是上半连续函数。如果 Y 的维数有限,则剪切集值映射

$$F_r:X\to Y,\quad F_r(x)\triangleq F(x)\cap r(x)B$$

是上半连续集值映射,其中 B 为 Y 空间的单位球。

定理 4(Ⅱ型下限质量生存定理) 对于一个具有Ⅱ型生存质量函数 U 的微分包含系统和时间函数 $w(\cdot)$,如果:

1) 生存质量函数 $U\in\boldsymbol{U}_0(R^n)$;

2) 时间函数 $w(\cdot)$ 是下半连续的函数。

则闭子集 $K\subset \mathrm{Dom}(U)$ 有Ⅱ型下限质量生存特性(或是Ⅱ型下限质量生存的)的充分必要条件是子集 $K\subset\mathrm{Dom}(U)$ 为微分包含系统(13)的Ⅱ型下限质量生存域。

证明略。

4.3 Ⅱ型下限极大质量生存及Ⅱ型下限极大质量生存定理

对于一个有限理性的决策者而言,要求在满足下限生存质量要求的基础上寻求一个极大质量生存解。即满足

$$\text{a.e. } t\geq 0$$

$$U(x(t),x'(t))=\sup_{v\in T_K(x(t))\cap U'_w(t,x(t))}U(x(t),v)$$

它是生存质量最大的质量生存解。值得注意的是这里的极大质量生存解是局部极大解,它仍是有限理性解而非最优解。下面讨论这样的解的存在性。首先先给出一些基本概念和证明中用到的命题。

命题 6[1](最大值定理) 给定度量空间 X, Y,集值映射 $F:X\to Y$ 和函数 $f:\mathrm{Graph}(F)\mapsto R$:

1) 如果 f 和 F 是下半连续的,则边际函数也是

下半连续的;

2) 如果 f 和 F 是上半连续的且 F 的值是紧集, 则边际函数也是上半连续的。

定理 **5**(Ⅱ型下限极大质量生存定理)　对于一个具有 Ⅱ 型生存质量函数 U 的微分包含系统和时间函数 $w(\cdot)$, 如果:

1) 生存质量函数 $U \in \boldsymbol{U}_0(R^n)$;

2) 生存质量函数是连续函数;

3) 时间函数 $w(\cdot)$ 是连续函数;

4) Ⅱ型下限质量生存的生存域 K 是柔滑闭集。则质量微分包含存在 Ⅱ 型下限极大质量生存解, 使得

a. e. $t \geq 0$

$$U(x(t), x'(t)) = \sup_{v \in T_K(x(t)) \cap U_w^t(t, x(t))} U(x(t), v)$$

证明　第 1 步:

1) 由生存质量函数 $U(x, v)$ 是连续函数和时间函数 $w(\cdot)$ 是连续函数, 易知集值映射 F_w^t 是一个连续映射;

2) 质量生存域 K 是柔滑的, 即集值映射 $x \to T_K(x)$ 是下半连续的。

3) $\forall x \in K, \forall t \geq 0, F_w^t(t, x) \cap T_K(x) \neq \varnothing$。

综合 1) ～ 3), 集值映射 $(t, x) \to F_w^t(t, x) \cap T_K(x)$ 是下半连续的。

第 2 步: 令

$$\lambda(t, x) = \sup_{v \in T_K(x(t)) \cap U_w^t(t, x(t))} U(x(t), v)$$

1) 已知生存质量函数 $U(x, v)$ 是下半连续函数;

2) 由第 1 步知, 集值映射 $(t, x) \to F_w^t(t, x) \cap T_K(x)$ 是下半连续的;

根据命题 6, $\lambda(t, x)$ 也是下半连续的。

第 3 步: $G(t, x) = \{v \in R^n \mid U(x, v) \geq \lambda(t, x)\}$, 由于:

1) 已知生存质量函数 $U(x, v)$ 是上半连续函数;

2) 由第 2 步知, $\lambda(t, x)$ 是下半连续函数。

同定理 4, 集值映射 $G(t, x)$ 是一个 Marchaud 映射。根据生存定理 1, 本定理得证。

5　结　　语

西蒙的有限理性说是现代决策理论的基石[7]。在一个复杂系统内, 由于引入了生存质量函数, 使我们得以描述一个“有限理性”的决策者。由于既不能确知系统的演化方向, 又无法知晓决策的终点, 这便决定了他不可能是“完全理性”的决策者。但在各个时刻对生存质量的要求, 又使他区别于只要生存的“最低理性”的决策者。由于理性因素的加入, 此决策者成为一个“有限理性”的决策者。这样的决策者作为我们探讨的对象更符合实际。

在上述思想的指导下, 本文建立了如图 1 的质量生存决策体系, 并在定理 2～定理 5 中给出了各类质量生存决策的充要条件。但是也应看到, 不论生存决策还是质量生存决策, 目前已有的成果与它们的实际应用仍有相当的距离。这从另一个侧面反映了复杂系统研究方向和思路的转变。对于复杂系统, 我们的任务更多的是“理解”和“解释”, 而不再是“解决”。

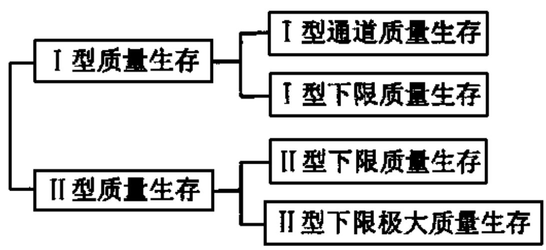

图 **1**　质量生存体系

参考文献:

[1] J P Aubin. Dynamic economic theory: A viability approach[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[2] J P Aubin. A viability approach to Lyapunov's second method, economics and math systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 31-38.

[3] F Clarke, Ledyaev Y, Stern R *et al*. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey[J]. Dynamical Control Systems, 1995, 1: 1-48.

[4] J P Aubin, Frankowska H. Set-valued analysis, systems and control: Foundations and applications[M]. Boston: Birkhauser, 1990.

[5] 吴从炘, 马明. 模糊分析学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[6] J P Aubin. Viability theory: Systems and control[M]. Boston: Birkhauser, 1991.

[7] 赫伯特 西蒙, 杨砾. 现代决策理论的基石[M]. 徐立译. 北京: 北京经济学院出版社, 1989.