

文章编号: 1001-0920(2001)05-0557-05

## 基于观测器的鲁棒模型预测控制算法

王 伟<sup>1</sup>, 杨建军<sup>2</sup>, 吕 博<sup>3</sup>

(1 大连理工大学 信息与控制研究中心, 辽宁 大连 116024; 2 清华大学  
自动化系, 北京 100084; 3 东北大学 自动化研究中心, 辽宁 沈阳 110004)

**摘 要:** 对于含有未建模动态的输入受限离散时间线性系统, 当系统状态不可测时, 提出一种基于状态观测器的鲁棒模型预测控制算法。该算法采用双模控制结构, 将不变椭圆集同时应用于估计状态方程和误差方程, 保证算法的稳定性和可行性, 并同时给出系统稳定和可行的条件。

**关键词:** 输入受限; 鲁棒性; 不变集; 稳定性; 可行性

**中图分类号:** TP 273

**文献标识码:** A

## Robust Model Predictive Control Method Based on State Observer

WANG Wei<sup>1</sup>, YANG Jian-jun<sup>2</sup>, LU Bo<sup>3</sup>

(1 Research Center of Information and Control, Dalian University of Science and Technology,  
Dalian 116024, China; 2 Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084,  
China; 3 Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** A robust model predictive control algorithm is presented for linear discrete-time system with input constraint and unmodelling dynamics when the states of controlled system are unmeasurable. Using dualmode control structure, the ellipsoid invariant set is applied to estimate state and states estimation error to guarantee the stability and feasibility of the algorithm. The conditions of stability and feasibility of system are presented as well.

**Key words:** constraint input; robustness; ellipsoid invariant set; stability; feasibility

### 1 引 言

当被控对象输入受限时, 采用双模控制结构是保证系统具有稳定性和可行性的有效方法<sup>[1]</sup>。双模控制结构的基本设计思想是: 1) 假设被控对象不受限, 设计最优控制律  $u = -Kx$ ; 2) 在输入受限时, 引入辅助控制变量  $c$ , 保证输入受限系统的稳定性和可行性。系统的闭环稳定性是通过不变集保证的。双

模控制算法的另一优点是可将算法的在线计算转变为离线计算。目前, 对采用双模控制结构的模型预测控制算法<sup>[1~3]</sup>的研究都是基于系统状态可测的假设, 对于状态不可测且输入受限系统的鲁棒性的文章还未见报道。

本文在双模控制结构的基础上提出了基于状态观测器的鲁棒模型预测控制算法。当系统状态不可

收稿日期: 2000-03-10; 修回日期: 2000-04-24

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目 (69825106); 教育部骨干教师基金项目

作者简介: 王伟 (1955—), 男 (满族), 辽宁盖县人, 教授, 博士生导师, 从事模型预测控制和计算机控制等研究; 杨建军 (1972—), 男, 浙江余姚人, 博士后, 从事模型预测控制理论及应用研究。

测时,使用状态观测器估计系统状态,而系统的未建模动态则通过误差动态方程带入状态观测器方程,分别对估计状态和估计误差定义不变椭圆集,从而得出保证闭环系统稳定和可行的条件。

## 2 输入受限系统的鲁棒控制

考虑输入受限 SISO 离散时间系统

$$x_{t+1} = Ax_t + bu_t + \Phi(x_t, u_t) \quad (1)$$

$$y_t = Cx_t \quad (2)$$

$$- \bar{u} \leq u_t \leq \bar{u} \quad (3)$$

其中,  $\Phi(x_t, u_t)$  为系统的未建模动态,为简单起见,以下用  $\phi$  表示;假定  $(A, B)$ ,  $(A, C)$  分别为可控可观测的;  $x \in R^n$ 。

当不考虑输入受限时,可根据线性系统  $(A, B, C)$  设计鲁棒稳定控制律

$$u_t = Kx_t \quad (4)$$

使系统(1), (2) 闭环稳定,且在一定意义上是最优的。

当考虑系统输入受限时,为保证算法的可行性,引入辅助变量  $c_t$ , 定义新的控制律

$$u_t = Kx_t + Ec_t \quad (5)$$

其中,  $c_t = [c_t, \dots, c_{t+n_c-1}]^T$  为辅助变量序列,  $n_c$  为辅助变量的长度;  $E = [1, 0, \dots, 0]$ 。

引入辅助控制变量  $c_t$  的作用在于保证控制律的可行性。当控制输入受限,而控制律(4) 在受限范围内时,为保证算法的最优性,  $c_t$  应为零;但当控制律(4) 因输入受限而不可行时,控制律(4) 不再最优,系统甚至不再稳定。这时通过调节非零  $c_t$  来保证可行性,但系统已不再是最优控制。因此在保证可行性的前提下,  $c_t$  应越小越好。

设计目标函数

$$J_t = c_t^T c_t \quad (6)$$

根据系统(1), (2) 和控制律(4), 极小化目标函数  $J$  很可能是一个非凸优化问题,当  $n$  和  $n_c$  较大时,计算过于复杂,因此定义扩展自主系统

$$z_{t+1} = \Xi z_t + \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中

$$z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ c_t \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} A + BK & BE \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

定义椭圆集

$$S_z = \{z \mid z^T P z \leq 1\} \quad (8)$$

其中  $P$  为正定矩阵。当  $z_t \in S_z$  时,若  $z_{t+1} \in S_z$  成立,则  $S_z$  为不变椭圆集。

假设 1 假设如下二次 Lipschitz 条件

$$\|\phi\| \leq \gamma \|\Gamma z_t\| \quad (9)$$

成立,其中  $\Gamma$  是正定矩阵。

假设 2 假设存在一个正数  $\gamma_x$ , 满足

$$E_x^T P E_x \leq \gamma_x I \quad (10)$$

其中,  $E_x$  为投影因子,使  $E_x^T z_t = x_t$ ;  $I$  为单位阵。

由假设 1、假设 2 和式(8) 有

$$e_t^T P e_t \leq \gamma_x \Gamma^T \Gamma z_t \quad (11)$$

引理 1<sup>[4]</sup> 任意给定正数  $\mu > 1$ , 则可定义正数

$\eta = 1 + (\mu - 1)^{-1}$ , 使下式成立

$$(z_1 + z_2)^T \bar{P} (z_1 + z_2) \leq \mu z_1^T \bar{P} z_1 + \eta z_2^T \bar{P} z_2 \quad (12)$$

其中,  $z_1, z_2$  是与  $\bar{P}$  维数相一致的向量,  $\bar{P}$  是正定矩阵。

由式(6), (10) 和引理 1 及不变集的定义有

$$z_{t+1}^T P z_{t+1} \leq z_t^T (\mu \Xi^T P \Xi + \eta \gamma_x \Gamma) z_t + z_t^T P z_t \quad (13)$$

则当满足假设 1 和假设 2, 且

$$\mu \Xi^T P \Xi + \eta \gamma_x \Gamma \leq P \quad (14)$$

时,  $S_z$  为不变集。

考虑系统输入受限,则算法在满足不变性条件的同时,还应满足可行性条件。即对任意  $z_t \in S_z$ , 反馈控制律(5) 应满足受限条件(2), 即

$$|u_t| = |Kx_t + Ec_t| = |\bar{K}z_t| \leq \bar{u} \quad (15)$$

其中  $\bar{K} = [K, E]$ 。由式(7) 知

$$|\bar{K}z_t| = |\bar{K}P^{-1/2}P^{1/2}z_t| \leq \bar{K}P^{-1/2}P^{1/2}z_t \leq \bar{K}P^{-1/2}z_t \leq \bar{u}$$

则得可行性条件

$$\bar{K}P^{-1}\bar{K} \leq \bar{u}^2 \quad (16)$$

## 3 基于观测器的鲁棒模型预测控制

当系统状态不可测时,采用状态观测器估计系统状态。设观测器动态方程和误差方程为

$$\hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t + L(y_t - C\hat{x}_t) \quad (17)$$

$$e_{t+1} = \Phi e_t + \hat{\Phi}(x_t, e_t, u_t) \quad (18)$$

其中,  $\hat{x}_t$  为状态观测值,  $\hat{\Phi}(x_t, e_t, u_t)$  是以状态观测值表示的未建模动态,  $e_t = x_t - \hat{x}_t$ ,  $\Phi = A - LC$ ,  $L$  为观测器反馈增益向量。为使误差收敛至零,选取  $L$  使

$\Phi$  的特征值在单位圆内, 则有控制律

$$u_t = Kx_t + Ec_t \quad (19)$$

代入式(17)和(18), 得扩展自主系统及相应的动态误差方程

$$\hat{z}_{t+1} = \Xi \hat{z}_t + \begin{bmatrix} LCe_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$e_{t+1} = \Phi e_t + \hat{\phi}(x_t, e_t, c_t) \quad (21)$$

其中  $\Xi$  的定义同式(7)。为书写简单, 以下用  $\hat{\phi}$  代替  $\hat{\phi}(x_t, e_t, c_t)$ 。

定义扩展估计状态和误差的椭圆集  $\tilde{S}$  和  $S_e$ 。

$$\tilde{S} = \{z \mid z^T \tilde{P} z \leq 1\} \quad (22)$$

$$S_e = \{e \mid e^T P_e e \leq \bar{e}^2\} \quad (23)$$

其中,  $0 < \bar{e}^2 < 1$ ,  $\tilde{P}$  和  $P_e$  为正定矩阵。

**假设 3** 假设如下二次 Lipschitz 条件

$$\|\hat{\phi}(\hat{x}_t, \hat{e}_t, \hat{c}_t) - \hat{\phi}(\hat{x}_s, \hat{e}_s, \hat{c}_s)\| \leq \eta \Gamma_z \|\hat{x}_t - \hat{x}_s\| + e_t^T \Gamma_e e_t \quad (24)$$

成立, 其中  $\Gamma_z$  和  $\Gamma_e$  为正定矩阵。

**定理 1** 对于系统(1), (2)和状态观测器(17), 给定控制器反馈向量  $L$  和观测器反馈向量  $L$ , 则  $\tilde{S}$  和  $S_e$  为不变集的条件是

$$\mu_z \Xi^T \tilde{P} \Xi (1 - \bar{e}^2) \tilde{P} \quad (25)$$

$$\eta C^T L^T E_x^T \tilde{P} E_x L C \leq P_e \quad (26)$$

$$P_e \leq \mathcal{M} \quad (27)$$

$$\mu_e \Phi^T P_e \Phi + \eta \mathcal{M}_e (1 - \beta^2 / \bar{e}^2) P_e \quad (28)$$

$$\beta = \sqrt{\eta \mathcal{M}_z^{1/2} \tilde{P}^{-1/2}} \bar{e} \quad (29)$$

其中,  $\mu_z > 1$ ,  $\mu_e > 1$ ,  $\eta_z = 1 + (\mu_z - 1)^{-1}$ ,  $\eta_e = 1 + (\mu_e - 1)^{-1}$ 。

**证明** 当  $z_t \in \tilde{S}$ ,  $e_t \in S_e$  时, 由式(20), (25), (26)和引理 1, 得

$$\hat{z}_{t+1}^T \tilde{P} \hat{z}_{t+1} \leq (1 - \bar{e}^2) \hat{z}_t^T \tilde{P} \hat{z}_t + e_t^T P_e e_t \leq 1 \quad (30)$$

所以当  $z_t \in \tilde{S}$ ,  $e_t \in S_e$  时,  $z_{t+1} \in \tilde{S}$ 。

当  $e_t \in S_e$  时, 由式(21), (24), (27)和引理 1 得

$$e_{t+1}^T P_e e_{t+1} \leq e_t^T (\mu_e \Phi^T P_e \Phi + \eta \mathcal{M}_e) e_t + \eta \mathcal{M}_z^T \Gamma_z z_t \quad (31)$$

由  $\tilde{S}$  的定义和式(29)得

$$\eta \mathcal{M}_z^T \Gamma_z z_t \leq \sqrt{\eta \mathcal{M}_z^{1/2} \tilde{P}^{-1/2}} \beta^2 = \beta^2 \quad (32)$$

把式(32)代入(31), 由式(28)得

$$e_{t+1}^T P_e e_{t+1} \leq (1 - \beta^2 / \bar{e}^2) e_t^T P_e e_t + \beta^2 \bar{e}^2 \quad (33)$$

即当  $e_t \in S_e$  时,  $e_{t+1} \in S_e$ 。所以  $\tilde{S}$  和  $S_e$  为不变集。(证毕)

考虑系统输入受限时, 控制律(19)在保证  $\tilde{S}$  不变性的同时还需保证可行性。由控制律(19), (22)和输入受限条件(3)得

$$\begin{aligned} |u_t| &= |Kx_t + Ec_t| \\ &\leq \sqrt{\tilde{P}^{-1} K^T K + E^T E} \sqrt{\tilde{P} z_t^T \tilde{P} z_t} + \bar{u} \end{aligned} \quad (34)$$

由上式可知

$$\sqrt{\tilde{P}^{-1} K^T K + E^T E} \sqrt{\tilde{P} z_t^T \tilde{P} z_t} + \bar{u} \leq 0 \quad (35)$$

是保证  $u_t$  可行的充分必要条件。

现将有关假设和条件总结如下:

1) 初始时刻假设

初始估计误差  $e(0) \in S_e$ ;

初始时刻存在  $c_0$ , 使  $z_0 \in \tilde{S}$ 。

2) 离线条件

$$\mu_z \Xi^T \tilde{P} \Xi (1 - \bar{e}^2) \tilde{P};$$

$$\eta C^T L^T E_x^T \tilde{P} E_x L C \leq P_e;$$

$$P_e \leq \mathcal{M};$$

$$\mu_e \Phi^T P_e \Phi + \eta \mathcal{M}_e (1 - \beta^2 / \bar{e}^2) P_e;$$

$$\beta = \sqrt{\eta \mathcal{M}_z^{1/2} \tilde{P}^{-1/2}} \bar{e};$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & K^T \\ K & u^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

3) 在线条件

滚动求解  $c_t$ , 使之满足  $z_t^T \tilde{P} z_t \leq 1$ 。

由上述假设和条件, 可得如下鲁棒模型预测控制算法:

**算法 1**

第 1 步: (离线) 根据条件 ~ , 用半正定规划法求解正定矩阵  $\tilde{P}$  和  $P_e$ ;

第 2 步: (在线) 在式(22)的约束下, 极小化目标函数  $J_t = c_t^T c_t$ , 得最优辅助变量序列  $c_t$ , 计算当前控制输入  $u_t = Kx_t + Ec_t$ , 并作用于系统;

第 3 步: (在线)  $t = t + 1$ , 返回第 2 步。

**定理 2** 若假设 3 和初始时刻假设 ~ , 满足, 且存在  $\tilde{P}$  和  $P_e$  满足条件 ~ , 则算法 1 始终可行, 并且系统闭环稳定, 控制律最终收敛到式(4)。

**证明** 由假设条件可知, 在  $t$  时刻存在可行的辅助变量序列  $c_t$ , 使  $z_t \in \tilde{S}$ 。由不变集定义知,  $\tilde{S}_{t+1} = \{z \mid z^T \tilde{P} z \leq 1\}$ , 显然  $\tilde{S}_{t+1}$  并不一定是  $t+1$  时刻的最优解。由  $J_{t+1}$  可求解  $t+1$  时刻最优辅助变量  $c_{t+1}$ , 使  $J_{t+1} = \tilde{J}_{t+1} = J_t$ 。由此可知目标函数  $J_t$  是单调递减的, 且在有限步内控制律收敛至不受限时的稳定控制律, 从而保证了闭环稳定性。(证毕)

**注 1** 因为  $u_t = Kx_t$  是稳定控制律, 且目标函数  $J_{t+1}$  单调递减, 系统的估计状态将渐近趋向于零, 所以必然会在某个有限的时刻, 最优控制律  $u_t = Kx_t$  可行, 这时  $c_t$  的最优解为零。因此由算法 1 得到

的  $c_t$  不是渐近趋向于零,而是在有限时间内达到零。

## 4 仿真结果

考虑 SISO 系统<sup>[2]</sup>

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 495 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 & 078 & 7 \end{bmatrix} u_t + \Phi(x_t, u_t)$$

$$y_t = [1 \ 0] x_t$$

$$\Phi(x_t, u_t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.001 \end{bmatrix} \frac{\alpha - 5.05}{4.95} x_t$$

其中  $0.1 < \alpha < 10$ , 本例中选取  $\alpha = 10$ , 系统的输入受限为  $-4 \leq u_t \leq 4$ 。

设计控制器使系统输出为零。根据文献[2], 采用  $\min\text{-max}$  方法优化性能指标函数, 设计控制器反馈向量  $K = [-25.5245, -8.8882]$ 。采用极点配置方法设计观测器反馈向量  $L$ , 指定闭环极点位于  $[0.9, 0.8]$ , 则  $L = [-0.2050, 1.2353]$ 。

取  $e^2 = 0.15, n_c = 5$ , 图1和图2分别给出了估计状态和估计误差的初始允许集。取估计状态初始值  $x_0 = [0.06, 0.3]$ , 误差初始值  $e_0 = [-0.06,$

$0.2]$ , 图1给出了系统实际状态和估计状态的响应曲线。图中“\*”表示实际状态, “o”表示估计状态。如图所示, 尽管系统的估计状态和实际状态的初始偏差较大, 但控制器最终使系统估计状态收敛到实际状态。且由图可知实际状态初始值并不在不变集内, 系统性能是通过对估计状态的控制实现的。图2给出了系统估计误差的响应曲线。图3~图5分别给出了控制律  $u_t$ , 辅助变量  $c_t$  和输出  $y_t$  的响应曲线。为了说明引入辅助变量的作用, 图3和图5中给出了引入和未引入辅助变量的变化曲线。图中点线为不考虑受限时的系统响应, 实线为考虑受限采用本文方法时的系统响应。由图可见, 在未引入辅助变量的情况下, 控制律将超出受限范围。

## 5 结论

本文针对含有未建模动态的输入受限线性系统, 提出一种基于观测器的鲁棒模型预测控制方法。文中设计鲁棒控制器的关键是给出误差不变椭圆集, 从而得出估计状态椭圆集的不变性和可行性条件。算法的另一优点是在线计算量小, 便于实际应用。

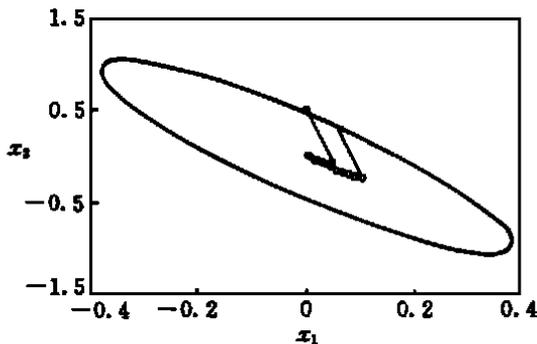


图1 状态不变集

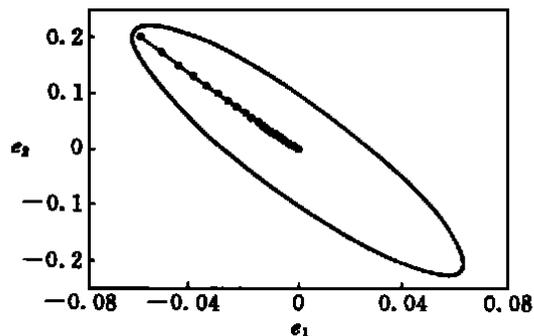


图2 误差不变集

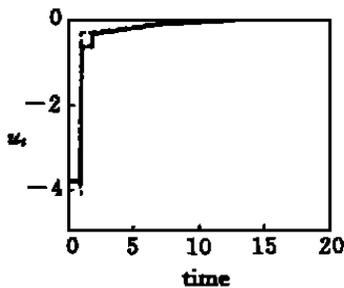


图3 控制输入  $u_t$  的响应

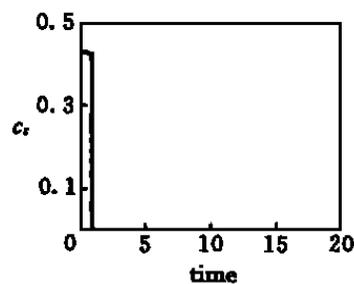


图4 辅助变量  $c_t$  的响应

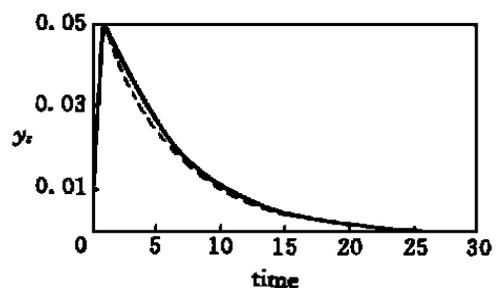


图5 输出  $y_t$  的响应

(下转第 564 页)

$Z_{1111}$ ,  $Z_{2222}$ ,  $Z_{3333}$ ,  $Z_{4444}$  和  $Z_{5555}$ , 关联结束。

表 2 给出了本文算法在检测概率为 1、没有虚警、仅给定目标方位时, 从计算视线交点开始到关联结束时的运算时间(计算机的 CPU 为 Celeron 300 A, 内存为 48M, 操作系统为 Windows 98)。并且假定传感器探测范围为  $0 \sim 180^\circ$ ; 即仅考虑面向目标的交点。从结果看, 其计算量主要表现在计算交点以及集合划分上, 由于需计算的交点数与传感器数和目标数乘积的平方成正比, 因而计算交点的时间与交点数同步增长, 整个关联算法所耗时间也相应增加。同其它算法相比, 该关联算法在实时性方面有较优良的表现(在传感器数为 3, 目标数为 5 时, 分枝定界法耗时 16.6 s, 松弛算法耗时 0.4 s; 在目标数为 10 时, 松弛算法耗时 2.3 s<sup>[4]</sup>), 具有一定的应用价值。

表 2 数据关联所需要时间/s

传感器	目标数							
	5	7	10	15	20	30	40	50
3	< 0.01	< 0.01	0.01	0.03	0.06	0.15	0.28	0.45
5	0.01	0.02	0.05	0.11	0.20	0.49	0.92	1.5
7	0.04	0.06	0.11	0.24	0.43	1.1	2.1	3.6
10	0.09	0.13	0.25	0.59	1.2	3.1	7.4	11.6
15	0.13	0.29	0.60	1.7	2.9	8.8	26.3	67.7
20	0.23	0.46	1.0	2.6	5.5	30.3	96.7	285.1

下面考虑存在漏检和虚警(较小)的情况。漏检将导致交点数目较多的集合(如  $Z^m$  和  $Z^{m-1}$ ) 减小, 虚警将导致交点数目较少的集合(如  $Z^1$  和  $Z^2$ ) 增大。前者将  $Z^m$  减小可减少运算量, 提高性能; 另外, 因对  $Z^m$  集合削减后, 可能增加对诸如  $Z^{m-1}$  等集合进行判断, 不能很快得出结果, 从而影响了性能。而后的影响大部分可在预处理阶段剔除, 对整体性能不会

产生大的影响, 例如在检测概率  $P_D = 0.95$ , 虚警概率  $P_{FA} = 0.05$  时, 系统的性能几乎未受影响。

## 4 结 语

本文将文献[1]提出的针对被动式传感器的快速数据关联算法推广到多传感器情况, 讨论了算法的实现原理, 给出了算法的具体实现过程。在检测概率为 1, 没有虚警的情况下做了仿真实验, 同时对存在较小漏检和虚警的情况进行了分析说明。实验结果表明, 尽管在目标和传感器比较多时, 视线交点数与目标和传感器乘积的平方成正比, 但本文算法仍表现出优良的性能, 在实时性方面存在优势, 具有一定的应用前景。

### 参考文献:

- [1] 王明辉, 游志胜, 赵荣椿, 等. 一个快速的被动式传感器数据关联算法[J]. 电子学报, 2000, 28(12): 45-47.
- [2] M R Garey, D S Johnson. Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness[M]. San Francisco: Freeman, 1979.
- [3] C H Papadimitriou, K Steiglitz. Combinatorial optimization: Algorithms and complexity[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.
- [4] K R Pattipati, S Deb, Y Bar-Shalom *et al*. A new relaxation algorithm and passive sensor data association[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1992, 37(2): 198-213.
- [5] S Deb, M Yeddanapudi, K Pattipati *et al*. A generalized SD assignment algorithm for multisensor multitarget state estimation[J]. IEEE Trans on Aero and Elec Syst, 1997, 33(2): 523-536.
- [6] S S Blackman. Multi-target tracking with radar applications[M]. Dedham: Artech House Inc, 1986.

(上接第 560 页)

### 参考文献:

- [1] B Kouvaritakis, J A Rossiter, J Schuurmans. Efficient robust predictive control[A]. Proc Amer Contr Conf [C]. San Diego, 1999.
- [2] V K M ayuresh, B Venkataramanan, M Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [3] J A Rossiter, B Kouvaritakis, M J Rice. A numerically robust state-space approach to stable predictive control strategies[J]. Automatica, 1998, 34(1): 65-73.
- [4] M Cannon, B Kouvaritakis, Y I Lee *et al*. Efficient nonlinear model based predictive control[R]. University of Oxford, 1999.