

文章编号: 1001-0920(2001)05-0565-04

# 动态滑模控制及其在移动机器人输出跟踪中的应用

晁红敏, 胡跃明

(华南理工大学 自动控制工程系, 广东 广州 510640)

**摘 要:** 针对轮式移动机器人的输出跟踪问题, 提出一种动态滑模控制方法。首先给出机器人的动力学简化模型, 然后将其分解成两个低阶子系统, 并给出其输出跟踪的动态滑模控制器设计方法。仿真试验表明该方法能明显地削弱滑模控制系统的抖振。

**关键词:** 轮式移动机器人; 电机动力学; 输出跟踪; 动态滑模控制; 抖振削弱

中图分类号: TP 24

文献标识码: A

## Dynamical Sliding Mode Control and Its Applications to Output Tracking of Mobile Robots

CHAO Hongmin, HU Yueming

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** A dynamical sliding mode control approach is proposed for the output tracking of wheeled mobile robots. A reduced dynamic model of mobile robots is developed. Applying diffeomorphism and nonlinear state feedback transformation to the reduced model, the system is then decomposed into two lower-dimensional linear and nonlinear subsystems. The design of the dynamical sliding mode controller is also addressed for the output tracking problem of the mobile robot. Numerical simulations show that the proposed strategy can considerably weaken the chattering of sliding mode control systems.

**Key words:** wheeled mobile robots; motor dynamics; output tracking; dynamical sliding mode control; chattering reduction

### 1 引 言

轮式移动机器人在国防和工业中具有很高的应用价值, 近年来已引起国际学术界和工业界的高度重视<sup>[1~5]</sup>。轮式移动机器人是典型的高度非线性的非完整力学系统, 它不能用光滑或连续的时不变状态反馈来实现其渐近稳定或跟踪, 这便使得不连续的滑模控制方法更具吸引力<sup>[4~7]</sup>。

传统滑模控制方法中切换函数的选取一般只依赖于系统状态, 而与系统输入无关。这样, 到达律中的不连续项会直接转移到控制中, 使系统在不同的控制逻辑之间来回切换, 从而引起系统抖振。而动态滑模控制方法<sup>[7]</sup>在选取切换面时不仅依赖于系统状态, 而且与系统输入甚至输入的一阶或高阶导数有关, 因而到达律中不连续项的影响可有相当部分转移到控制的一阶或高阶导数项中去, 这便大大削弱

收稿日期: 2000-06-07; 修回日期: 2000-12-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(69974015); 国家 863 计划智能机器人主题项目(9805-19); 广东省自然科学基金项目(990583)

作者简介: 晁红敏(1978—)女, 山东济南人, 博士生, 从事非线性系统、机器人运动规划与控制的研究; 胡跃明(1960—), 男, 安徽黄山人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制理论及应用、机器人控制等研究。

了滑模系统的抖振。

本文基于移动机器人和驱动电机的动力学模型, 针对其输出跟踪问题给出了动态滑模控制器的设计方法。

### 2 考虑移动机器人运动学和驱动电机动力学的动态模型

考虑典型两轮驱动的移动机器人<sup>[1]</sup>, 它由两个独立驱动的后轮和一个提供平衡的从动前轮组成。采用两台直流伺服电机为两驱动轮提供动力, 其动态模型可表示为具有非完整约束的广义力学系统的形式, 即

$$M(q)\ddot{q} = F(q)T + A^T(q)\lambda \quad (1)$$

$$\dot{q} = S(q)v \quad (2)$$

式(1)为系统的动力学方程, 式(2)为系统的运动学方程。其中

$$q = (x, y, \theta)^T, \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_\theta \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ D & -D \end{bmatrix}, \quad S(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

控制输入  $v = [v_1 \ v_2]^T$  分别为轮子的线速度和角速度。将式(2)两边对时间求导并结合式(1), 可得

$$\begin{cases} \dot{q} = S(q)v \\ \dot{v} = (S^TMS)^{-1}(-S^T\dot{M}S\dot{v} + S^TB\dot{T}) \end{cases} \quad (3)$$

为简化控制设计, 人们往往忽略机器人驱动电机的动力学。这样简化的结果使得系统中存在未建模干扰, 并影响其跟踪和定位。在高速高精度的应用场合, 为提高控制性能, 作为系统未建模高频扰动主要来源的电机动力学不能轻易忽略, 控制设计中必须考虑电机模型的影响<sup>[8-10]</sup>, 即

$$l \frac{di}{dt} + ri + k_e\omega = u \quad (4)$$

其中,  $l, r, k_e$  分别为电机电枢的电感, 电阻和反电势常数,  $u$  为输入端电压。将驱动力矩  $T_i$  和角速度  $\omega$  折合到电机轴上, 有

$$\frac{1}{\beta k_T} \dot{T}_i + \frac{r}{\beta k_T} T_i + k_e\beta\omega = u_i \quad (5)$$

其中,  $\beta$  为齿轮头减速比,  $k_T$  为电机力矩常数。联立式(3)~(5)并消去中间变量  $T$ , 可得电机端电压  $u$  为控制量的三阶动态模型

$$\begin{cases} \dot{q} = S(q)v \\ H\ddot{v} + B\dot{v} + Kv = u \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$H = \frac{Rl}{2D\beta k_T} \begin{bmatrix} mD & I_\theta \\ mD & -I_\theta \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{Rr}{2D\beta k_T} \begin{bmatrix} mD & I_\theta \\ mD & -I_\theta \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{K_e\beta}{R} \begin{bmatrix} 1 & D \\ 1 & -D \end{bmatrix}$$

### 3 动态滑模控制器的设计

#### 3.1 动态滑模控制的主要思想

与常规滑模控制器的设计相似, 动态滑模控制器的设计可归结为以下两个基本问题:

- 1) 确定适当的切换面, 以使系统所产生的动态滑模运动具有期望的动态特性;
- 2) 选择适当的动态滑模控制规律, 以使期望的滑模运动能在有限时间内实现。

考虑Fliess局部广义控制标准型(LGCCF)<sup>[11]</sup>

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \sigma_2 \\ \dot{\sigma}_2 = \sigma_3 \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_p = Q_0(\sigma_1, \dots, \sigma_p, u, \dot{u}, \dots, u^{(3)}) \\ \sigma = \sigma_1 \end{cases} \quad (7)$$

为简单起见, 选取  $p$  阶的切换函数为  $\sigma$  及其导数的线性组合

$$s = \sigma_p + m_{p-1}\sigma_{p-1} + \dots + m_2\sigma_2 + m_1\sigma_1 \quad (8)$$

其中  $m_i (i = 1, 2, \dots, p-1)$  为使得  $(p-1)$  阶系统

$$\sigma_1^{(p-1)} + m_{p-1}\sigma_1^{(p-2)} + \dots + m_2\dot{\sigma}_1 + m_1\sigma_1 = 0 \quad (9)$$

具有期望渐近动态特性的常数。一旦系统进入滑模运动, 便有  $s = 0$ , 即系统选的滑模运动由式(9)描述, 因此具有期望的动态特性。考虑到滑模控制规律的选取问题, 若式(7)中的  $Q_0(\sigma_1, \dots, \sigma_p, u, \dot{u}, \dots, u^{(3)})$  已知, 则取到达律

$$\dot{s} = -k\text{sign}(s) - ws, \quad k, w > 0 \quad (10)$$

于是产生了隐式的动态滑模控制

$$Q_0(\sigma_1, \dots, \sigma_p, u, \dot{u}, \dots, u^{(3)}) = -m_{p-1}\sigma_p - \dots - m_2\sigma_3 - m_1\sigma_2 - k\text{sign}(s) - ws \quad (11)$$

只要上述方程有解, 就能使  $s$  在有限时间内趋于零, 从而保证系统实现期望的滑模运动。

由式(11)可见, 不连续项  $-k\text{sign}(s)$  的影响可



有相当多的部分转移到  $u$  的高阶导数项上, 因此可通过动态补偿和适当选取  $\sigma$ , 使得  $\gamma \rightarrow 1$ , 以削弱系统及其控制量的抖振, 从而使控制易于实现。

### 3.2 非完整机器人输出跟踪的动态滑模控制器设计

首先通过微分同胚和输入变换使系统输入/输出线性化。由式(6)可得系统的状态空间描述方程

$$\begin{cases} \dot{q} = S(q)v \\ \dot{v} = w \\ \dot{w} = H^{-1}(u - Kv - Bw) \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $q$  和  $v$  如前所述,  $w$  为补偿变量, 满足  $w = [w_1 \ w_2]^T = \dot{v}$ 。选取机器人的中心位置为系统输出

$$Y = [y_1 \ y_2]^T = [x + h\cos\theta \ y + h\sin\theta]^T \quad (13)$$

其中  $h > 0$ 。考虑系统的输出跟踪问题, 将式(13)两边对时间求微分得

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= D_1(\theta)v \\ \ddot{Y} &= D_2(\theta)v_2v + D_1(\theta)w \\ \dots \\ \dot{Y} &= (D_2(\theta)w_2 - D_1(\theta)v_2^2)v + 2D_2(\theta)v_2w + D_1(\theta)H^{-1}(u - Kv - Bw) \end{aligned}$$

令

$$P = (D_2(\theta)w_2 - D_1(\theta)v_2^2)v + 2D_2(\theta)v_2w$$

则有

$$\ddot{Y} = P + D_1(\theta)H^{-1}(u - Kv - Bw)$$

取状态变换  $Z = T(q, v, w)$  和非线性状态反馈

$$\begin{cases} z_{i1} = y_i, z_{i2} = \dot{y}_i, z_{i3} = \ddot{y}_i, \quad i = 1, 2 \\ z_4 = \theta \\ u = HD_1(\theta)^{-1}(U - P) + Kv + Bw \end{cases} \quad (14)$$

容易验证  $Z = T(q, v, w)$  在整个状态空间内为微分同胚, 其中

$$D_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -h\sin\theta \\ \sin\theta & h\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$D_2(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -h\cos\theta \\ \cos\theta & -h\sin\theta \end{bmatrix}$$

$U$  为辅助控制输入。此时系统可分解为如下两个子系统:

1) 线性化部分

$$\begin{cases} \dot{z}_{i1} = z_{i2} \\ \dot{z}_{i2} = z_{i3}, \quad i = 1, 2 \\ \dot{z}_{i3} = U_i \end{cases} \quad (15)$$

它是解耦的两个 SISO 子系统;

2) 未线性化部分

$$\dot{z}_4 = \frac{\partial S}{\partial q}(q)v \quad (16)$$

令  $z_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, 2, 3)$ , 可得其零动态方程为

$$\dot{z}_4 = \frac{\partial S}{\partial q}(q)D_1^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

其解显然稳定, 但非渐近稳定。

为使系统的输出跟踪任一期望输出轨迹  $Z_d = [z_{1d} \ z_{2d}]^T$ , 下面对上述线性化的子系统(15)设计输出跟踪的动态滑模控制器。

在子系统(15)中, 有  $y_i = z_{i1}$  (以下讨论中均取  $i = 1, 2$ )。令  $\sigma_i = z_{i1} - z_{id}$ , 则有  $\dot{\sigma}_i = z_{i2} - \dot{z}_{id}$ ,  $\ddot{\sigma}_i = z_{i3} - \ddot{z}_{id}$ ,  $\ddot{\sigma}_i = U_i - \ddot{z}_{id}$ , 即为形如式(7)的局部的广义控制标准型(LGCCF)。按上述设计思想选取切换函数

$$s_i = \ddot{\sigma}_i + m_{i3}\dot{\sigma}_i + m_{i2}\sigma_i + m_{i1}\sigma_i \quad (18)$$

到达律为

$$\dot{s}_i = -k_i \text{sign}(s_i) - w_{i3}s_i \quad (19)$$

则得动态滑模控制规律为

$$\begin{aligned} U_i &= z_{id}^{(4)} - m_{i3}(U_i - \ddot{z}_{id}) - m_{i2}(z_{i3} - \dot{z}_{id}) - m_{i1}(z_{i2} - \dot{z}_{id}) - k_i \text{sign}(s_i) - w_{i3}s_i \end{aligned} \quad (20)$$

将得到的新控制  $U = [U_1 \ U_2]^T$  代入原系统动态方程(14)的  $u$  中, 即可构成系统的动态滑模控制器。

## 4 数值仿真

为验证上述动态滑模控制器的有效性, 我们进行了数字仿真。设期望轨迹

$$z_{1d} = 3\sin(t), \quad z_{2d} = -5\cos(t)$$

使机器人中心位置跟踪所给定的椭圆运动。有关参数取自我们研制的移动机器人平台参数, 即:  $m = 50 \text{ kg}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ ,  $D = 0.3 \text{ m}$ ,  $I_0 = 0.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。机器人采用两台 80 W 直流伺服电机(减速比为  $\beta = 71$ )进行驱动, 电机参数为:  $L = 2.03 \text{ mH}$ ,  $r = 5.41 \ \Omega$ ,  $k_e = 0.02$ , 电流力矩常数  $k_T = 0.191 \text{ Nm/A}$ 。数值仿真结果如图 1 所示。

从仿真结果可以看出, 该控制器成功地实现了机器人对给定轨迹的跟踪, 即使在初始误差很大的情况下, 跟踪效果也很好, 且系统控制并未出现抖振。

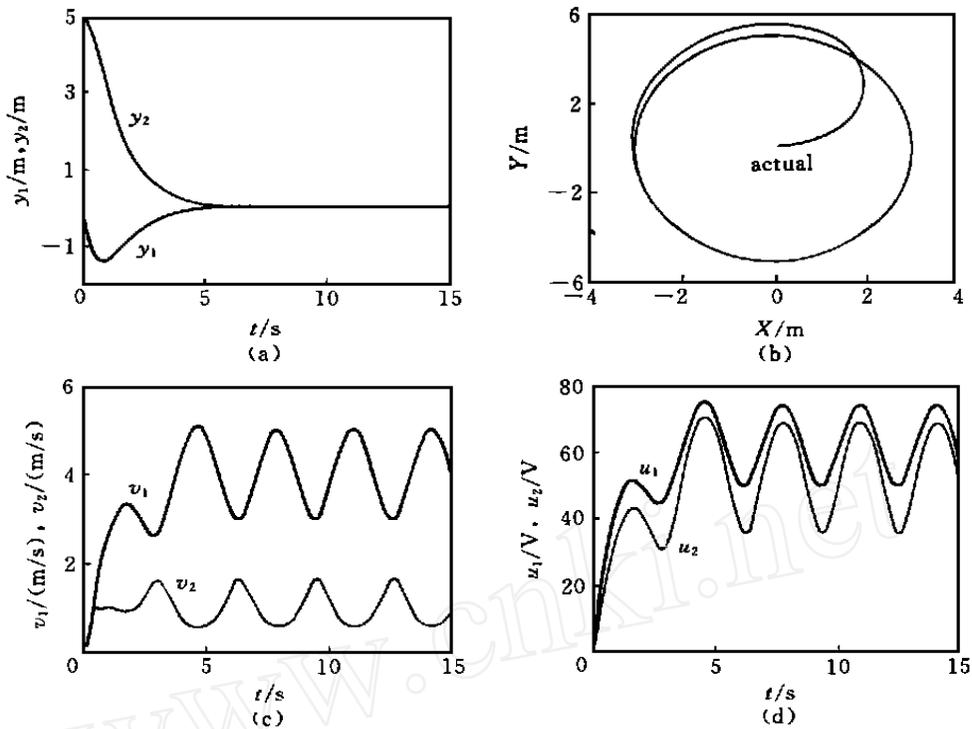


图1 数值仿真结果

(a) 机器人跟踪误差 (b) 运动轨迹和期望轨迹 (c) 机器人运动速度曲线 (d) 控制电压曲线

## 5 结 论

本文讨论并推导了包括电机动态的非完整移动机器人的动力学模型, 并将动态滑模控制的设计方法应用于机器人的输出跟踪问题. 仿真结果表明, 该控制方法能很好地实现机器人的输出轨迹跟踪, 并对消除抖振具有明显的作用.

### 参考文献:

- [1] Canudas de Wit, Siciliano B, Bastin G. Theory of robot control[M]. London: Springer-Verlag, 1998
- [2] Sarkar N, Yun X P, Kumar V. Control of mechanical systems with rolling constraints: Application to dynamic control of mobile robots[J]. Int J Rob Res, 1994, 13(1): 55-69
- [3] 胡跃明, 周其节, 裴海龙. 非完整控制系统的理论与应用[J]. 控制理论与应用, 1996, 13(1): 1-10
- [4] Hu Y M, Chao H M. High-order sliding mode control of nonlinear control systems with application to mobile robots[A]. Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications[C]. Singapore: World Scientific, 2000. 125-134
- [5] Yang J M, Kim J K. Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots[J]. IEEE Trans on Rob and Autom, 1999, 15(3): 578-587.
- [6] Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer's guide to sliding mode[J]. IEEE Trans on Contr Syst Tec, 1999, 7(3): 328-342
- [7] Sira Ramirez H. On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems[J]. Int J of Control, 1993, 57(5): 1039-1061.
- [8] Tarn T J, Bejczy A K, Yun X P *et al*. Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control[J]. IEEE Trans on Rob and Autom, 1991, 7(1): 114-121.
- [9] Su C Y, Stepanenko Y. On the robust control of robot manipulators including actuator dynamics[J]. J Rob Syst, 1996, 13(1): 1-10
- [10] Eideeb Y, Eimaraghy W H. Robust adaptive control of robotic manipulator including motor dynamics[J]. J Rob Syst, 1998, 15(11): 661-669.
- [11] Fliess M. Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1990, 35(9): 994-1001.