文章编号: 1001-0920(2001)05-0569-04

群决策中两类判断矩阵的一种集成方法

肖四汉[1], 樊治平[2], 王梦光[1]
(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 东北大学 工商管理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 研究群决策中不同偏好信息形式的集成方法。根据多个决策者给出关于方案的两类偏好信息——Fuzzy 判断矩阵和 AHP 判断矩阵, 建立了能够集成这两类偏好信息的最优化模型, 通过求解该模型可直接得到每个方案的参考排序值, 并使方案的排序结果最大程度地反映每个决策者的偏好。

关键词: 群决策; Fuzzy 判断矩阵; AHP 判断矩阵; 最优化模型; 方案排序
中图分类号: C 934 文献标识码: A

Integrated Approach to Two Judgement Matrices in Group Decision Making

XIAO Si-han[1], *FAN Zhi-ping*[2], *WANG Meng-guang*[1]
(1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: A group decision making problem is studied, in which the preference information about the alternatives provided by the decision makers can be of diverse nature. An optimization model is constructed to integrate the fuzzy judgement matrices and AHP judgement matrices given by the decision makers. By solving the model, the ranking values of alternatives can be obtained. In this model, rankings of alternatives reflect the subjective preference of every decision maker. An example is given to illustrate the usefulness of the proposed model.

Key words: group decision making; fuzzy judgement matrix; AHP judgement matrix; optimization model; alternative ranking

1 引 言

群决策问题是集结一群决策者中每个决策者的偏好为群的偏好, 然后根据群的偏好对一组方案进行排序, 从中选择群所最偏好的方案[1]。由于各个决策者之间存在利益或意见冲突, 这就需要调和各决策者的利益或意见。因此, 使决策结果最大程度地反映每个决策者的偏好, 就成为群决策的主要目标。需要指出, 在以往的群决策问题研究中, 大多是考虑决策者给出同类偏好信息形式的情形, 而有关不同形式的偏好信息的研究则所见甚少。实际上, 在群决策问题中, 由于每个决策者的经验和面临的环境可能不同, 决策者们即使针对同一组方案也可能给出不同形式的偏好信息, 这就出现了在群决策中如何将不同形式的偏好信息进行有效集成的问题[2]。文献

收稿日期: 1999-12-16; 修回日期: 2000-03-09
基金项目: 国家自然科学基金项目(70071004); 教育部高等学校骨干教师资助计划项目(教技师[2000]65)
作者简介: 肖四汉(1966—), 男, 湖北汉川人, 博士生, 从事决策分析、智能优化算法研究; 王梦光(1936—), 女, 吉林省吉林市人, 教授, 博士生导师, 从事生产计划与调度、智能优化算法等研究。

[2]的研究成果表明,对于不同偏好信息形式的群决策问题,一般做法是先一致化,即将不同形式的偏好信息转化为同一形式,然后再对其进行综合处理,得到方案排序结果。但是,一种偏好信息形式转化为另一种偏好信息形式时,会不同程度地丢失原有的偏好信息,即形式的转化引起了偏好信息的失真,而且有些偏好信息很难转化为同一形式。因此,这种做法受到了一定限制。

本文采用建立最优化模型的方法来直接集成不同形式的偏好信息,即极小化决策结果与个人偏好不一致的可能性。这是一种新的研究思路,也是在不进行形式一致化情况下的一种集成方法。具体地,文中针对多个决策者给出的两类偏好信息形式——Fuzzy判断矩阵和AHP判断矩阵,建立能够集结这两类偏好信息的最优化模型,通过求解该模型可直接得到每个方案的参考排序值,并使方案的排序结果最大程度地反映每个决策者的偏好。

2 问题描述

考虑的决策问题是从一个方案集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}(n\geq 2)$ 中选择最好的方案,其中 x_i 表示第 i 个决策方案。选择方案或进行方案排序的依据是决策者提供的偏好信息。不失一般性,设决策群体集为 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}(m\geq 2)$,其中 d_k 表示第 k 个决策者。设 c_k 为对应于决策者 d_k 的权重,且满足 $c_k\geq 0,\ \sum_{k=1}^{m}c_k=1$。

本文考虑多个决策者对方案集 X 可能给出两类形式的偏好信息,不妨设集合 D_F 中的决策者 d_k 给出Fuzzy判断矩阵,其中 D_F 中所有元素 d_k 的下标构成集合 K_F;集合 D_A 中的决策者 d_k 给出AHP判断矩阵,其中 D_A 中所有元素 d_k 的下标构成集合 K_A。这里,$D_F\cup D_A=D$。下面给出Fuzzy判断矩阵和AHP判断矩阵的描述。

1) Fuzzy判断矩阵[3~5]:决策者 $d_k\in D_F$ 针对方案集 X 给出的偏好信息由模糊偏好关系 $P^k\subset X\times X$ 描述,相应的隶属函数 $\mu_{P^k}: X\times X\rightarrow[0,1]$。其中 $\mu_{P^k}(x_i,x_j)=p_{ij}^k$,$p_{ij}^k$ 表示方案 x_i 优于方案 x_j(即 $x_i\succ x_j$)的程度。一般地,P^k 有如下性质:$p_{ij}^k\geq 0,p_{ij}^k+p_{ji}^k=1,p_{ii}^k=-$(表示未定义),$\forall i,j,k$。

2) AHP判断矩阵[6]:决策者 $d_k\in D_A$ 针对方案集 X 给出一个两两方案比较的AHP判断矩阵 $A^k=[a_{ij}^k]_{n\times n}$,其中 a_{ij}^k 表示方案 x_i 对方案 x_j 的相对重要程度。通常,a_{ij}^k 的取值按Satty给出的1～9刻度进行,$a_{ij}^k\in[1/9,9]$。A^k 有如下性质:$a_{ij}^k>0,a_{ij}^k=1/a_{ji}^k,a_{ii}^k=1,\forall i,j,k$。

本文要解决的问题是:如何集结已知的不同形式的偏好信息(即Fuzzy判断矩阵 P^k 和AHP判断矩阵 A^k),并得到方案排序的群体决策结果。

3 原理和方法

设方案 x_i 的参考排序值为 $w_i(i=1,2,\cdots,n)$,它是一个未知变量,且满足 $w_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}w_i=1$。考虑到矩阵 P^k 和 A^k 的性质及判断一致性的分析,我们希望确定 w_i,并满足

$$w_i/(w_i+w_j)\approx p_{ij}^k,\quad k\in K_F$$
$$i,j=1,2,\cdots,n,\quad i\neq j \tag{1a}$$
$$w_i/w_j\approx a_{ij}^k,\quad k\in K_A$$
$$i,j=1,2,\cdots,n \tag{1b}$$

由式(1a)和(1b)不难看出,$w_i/(w_i+w_j)$ 与 p_{ij}^k,w_i/w_j 与 a_{ij}^k 有相同的特征,w_i 愈大,p_{ij}^k 或 a_{ij}^k 也愈大,方案 x_i 愈可能排在前面。为分析方便,基于式(1a)和(1b),引入下列偏差函数

$$h_{ij}^k=w_i-(w_i+w_j)p_{ij}^k,\quad k\in K_F$$
$$i,j=1,2,\cdots,n,\quad i\neq j \tag{2a}$$
$$h_{ij}^k=w_i-w_ja_{ij}^k,\quad k\in K_A$$
$$i,j=1,2,\cdots,n \tag{2b}$$

为了得到方案的参考排序值 w_i,基于式(2a),对于决策群体 D_F,可以构造下列最优化模型

$$(\mathrm{P1})\quad \min z_1=\sum_{k\in K_F}c_k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}[w_i-(w_i+w_j)p_{ij}^k]^2=w^{\mathrm T}G_1w \tag{3a}$$
$$\text{s.t.}\quad e^{\mathrm T}w=1 \tag{3b}$$
$$w\geq 0 \tag{3c}$$

其中,$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$,$e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$,$G_1=[g_{1ij}]_{n\times n}$,$G_1$ 中的元素是

$$g_{1ii}=2\sum_{k\in K_F}c_k\sum_{r=1,r\neq i}^{n}(p_{ri}^k)^2$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{4a}$$
$$g_{1ij}=2\sum_{k\in K_F}c_k[(p_{ij}^k)^2-p_{ij}^k]$$
$$i,j=1,2,\cdots,n,\quad i\neq j \tag{4b}$$

同样,基于式(2b),对于决策群体 D_A,可以构造下列最优化模型

$$(\mathrm{P2})\ \min z_2 = \sum_{k\in K_A} c_k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(w_i - w_j a_{ij}^k)^2 = w^{\mathrm{T}} G_2 w \tag{5a}$$

$$\mathrm{s.t.}\ e^{\mathrm{T}} w = 1 \tag{5b}$$

$$w \geq 0 \tag{5c}$$

其中,w 和 e 的含义如前所述,$G_2 = [g_{2ij}]_{n\times n}$, G_2 中的元素是

$$g_{2ii} = \sum_{k\in K_A} c_k\left[n - 2 + \sum_{r=1}^{n}(a_{ri}^k)^2\right]$$

$$i = 1, 2, \cdots, n \tag{6a}$$

$$g_{2ij} = -\sum_{k\in K_A} c_k (a_{ij}^k + a_{ji}^k)$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n,\quad i\neq j \tag{6b}$$

由两类判断矩阵自身的性质可知,两个决策子群体给出的偏好信息标尺不同,即偏好信息数据在数量上存在较大差异,如果不消除这种差异而直接集结两个子群体给出的形式不同的偏好信息,即集结 z_1 和 z_2,则可能导致决策结果的偏差。从式(3a)和(5a)可以看出,差异产生于矩阵 G_1 和 G_2。为消除差异,需要对矩阵 G_1 和 G_2 进行某种形式的'规范化'。为此,引入在一定程度上可度量矩阵"大小"的矩阵范数。如果矩阵范数较大,则集结时对应的'规范化'系数应较小;反之,系数应较大。基于上面建立的模型P1 和 P2,可建立如下模型

$$\min z = w^{\mathrm{T}} G w \tag{7a}$$

$$\mathrm{s.t.}\ e^{\mathrm{T}} w = 1 \tag{7b}$$

$$w \geq 0 \tag{7c}$$

其中

$$G = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 \tag{8}$$

式(8)中,α_1 和 α_2 表示矩阵 G_1 和 G_2 的'规范化'系数,其定义如下

$$\alpha_1 = sp_2/(sp_1 + sp_2) \tag{9a}$$

$$\alpha_2 = sp_1/(sp_1 + sp_2) \tag{9b}$$

其中,$sp_j(j = 1,2)$ 是矩阵 G_j 的 Frobenius 范数,即 $sp_j = \|G_j\|_2 = \sqrt{\lambda_m}$, λ_m 是矩阵 $G_j^{\mathrm{T}} G_j$ 的最大特征根。

由式(7a)～(7c)构成的问题就是所建立的直接集结不同偏好——Fuzzy 判断矩阵 P^k 和 AHP 判断矩阵 A^k 的最优化模型。该模型的意义在于:寻找一个群体决策结果(即确定方案的排序值),亦即极小化决策结果与个人偏好的不一致的可能性。该模型的最优解就是群体决策结果意义下的各个方案的参考排序值。需要指出,模型中涉及的系数 α_1 和 α_2 不仅起到'规范化'的作用,而且还具有平衡两个子决策群体的评价标尺的作用,其取值既可按式(9a)和(9b)求出,也可由专家给定。

4　主要结果

记由式(7a)和(7b)所确定的最优化问题(即不考虑非负约束条件下的最优化问题)为第 1类问题,该问题的可行域为 Ω_1;由式(7a)～(7c)所确定的最优化问题为第 2 类问题,该问题的可行域为 Ω_2。第 1 类问题和第 2类问题的最优解分别记为 $w_{(1)}$ 和 $w_{(2)}$。为此,有如下结论:

定理1　如果 $w_{(1)}$ 是 Ω_2 的内点或界点,则第 1 类问题和第 2 类问题有相同的最优解,即 $w_{(1)} = w_{(2)}$。

证明　显然,第 1 类问题和第 2 类问题的可行域满足 $\Omega_2\subset\Omega_1$。因 $w_{(1)}$ 是第 1 类问题的最优解,故对任意的 $w\in\Omega_1(w\neq w_{(1)})$,有 $z(w_{(1)}) < z(w)$。特别是对任意的 $w\in\Omega_2(w\neq w_{(2)})$,有 $z(w_{(2)}) < z(w)$。如果 $w_{(1)}$ 是 Ω_2 的内点或界点,则 $w_{(1)}$ 是第 2 类问题的一个可行解,可行解满足 $z(w_{(1)}) < z(w)(w\in\Omega_2$ 但 $w\neq w_{(1)})$。由此可知,$w_{(1)}$ 也是第2类问题的最优解,即 $w_{(1)} = w_{(2)}$。(证毕)

定理2　由式(7a)和(7b)所确定的最优化问题的最优解为

$$w^* = G^{-1}e/e^{\mathrm{T}}G^{-1}e \tag{10}$$

证明　这是求解第 1 类问题的最优解。构造 Lagrangian 函数

$$L = w^{\mathrm{T}}Gw + 2\lambda(e^{\mathrm{T}}w - 1)$$

式中 λ 是Lagrangian 乘子。令 $\partial L/\partial w = 0$ 和 $\partial L/\partial\lambda = 0$,则有

$$Gw + \lambda e = 0 \tag{11a}$$

$$e^{\mathrm{T}}w = 1 \tag{11b}$$

联立求解式(11a)和(11b),可得

$$w^* = G^{-1}e/e^{\mathrm{T}}G^{-1}e \tag{12}$$

$$\lambda^* = -1/e^{\mathrm{T}}G^{-1}e \tag{13}$$

其中 w^* 就是所要求出的最优解。(证毕)

下面说明 $w^*\in\Omega_2$,即 w^* 是 Ω_2 的内点,也就是说明 w^* 是第 2 类问题的最优解。为此,有下面一些结论。为了节省篇幅,将略去定理的证明,其证明思路或过程可参见文献[7, 8]。

定理3　设 $P^k = [p_{ij}^k]_{n\times n}$ 是Fuzzy 判断矩阵,$A^k = [a_{ij}^k]_{n\times n}$ 是 AHP 判断矩阵,若对任意的 i, j, k,至少有一个 $w_i^*\neq(w_i^* + w_j^*)p_{ij}^k$ 或 $w_i^*\neq w_j^* a_{ij}^k$ 成立,

则有如下性质:

1) G 是正定矩阵, 并且是非奇异的或可逆的;

2) 恒有 $G^{-1} \geq [0]$, 即 G^{-1} 为非负矩阵。

定理 4 设 w^* 是由式(6a) 和(6b) 所确定的最优化问题的最优解, 即式(10) 成立, 则恒有 $w^* > [0]$, 即 $w^* \in \Omega_2$。

由上面的结论可知, 最优化模型(7a) ～(7c) 的最优解 w^* 由式(12) 确定。

5 算 例

假设 4 个决策者对方案集 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 分别给出偏好信息如下

$$P^1 = \begin{bmatrix} - & 0.1 & 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & - & 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & - & 0.9 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & - \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} - & 0.5 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & - & 0.8 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & - & 0.8 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & - \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 & 1/5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 5 & 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/4 & 5 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/3 \\ 4 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

其中, P^1 和 P^2 为 Fuzzy 判断矩阵, A^3 和 A^4 为 AHP 判断矩阵。设各个决策者的权重均相等, 即 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1/4$。根据式(4a) 和(4b), (6a) 和(6b), 可得

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.700 & -0.170 & -0.225 & -0.105 \\ -0.170 & 0.430 & -0.160 & -0.240 \\ -0.225 & -0.160 & 1.090 & -0.125 \\ -0.105 & -0.240 & -0.125 & 1.730 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 26.2878 & -2.6191 & -1.8958 & -2.6000 \\ -2.6191 & 6.1579 & -1.4583 & -1.4583 \\ -1.8958 & -1.4583 & 5.8559 & -1.2500 \\ -2.6000 & -1.4583 & -1.2500 & 9.8503 \end{bmatrix}$$

根据式(9a) 和(9b), 可得 $\alpha_1 = 0.938, \alpha_2 = 0.062$。根据式(8), 可得

$$G = \begin{bmatrix} 2.2855 & -0.3218 & -0.3285 & -0.2596 \\ -0.3218 & 0.7849 & -0.2404 & -0.3155 \\ -0.3285 & -0.2404 & 1.3853 & -0.1947 \\ -0.2596 & -0.3155 & -0.1947 & 2.2332 \end{bmatrix}$$

由式(12), 可得到方案的参考排序值向量为 $w^* = (0.1781, 0.4084, 0.2459, 0.1676)^T$。因此, 相应的方案排序即群体决策结果为 $x_2 \succ x_3 \succ x_1 > x_4$。

6 结 语

本文针对群决策中决策者给出关于方案的两类偏好信息——Fuzzy 判断矩阵和 AHP 判断矩阵, 提出一种新的方案排序方法, 通过建立一个最优化模型来集结不同类型的偏好信息, 得出的方案排序的群体决策结果最大程度地反映了每个决策者的偏好。本文给出的方法是针对决策者给出的两两方案比较的偏好信息进行的。对于决策者给出的既有本文给出的偏好信息, 又有如序关系和效用值等其它形式偏好信息时如何集成的问题, 作者将做进一步研究。

参考文献:

[1] 陈珽. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[2] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Syst, 1998, 97(1): 33-48.

[3] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Syst, 1978, 1(2): 155-167.

[4] Kacprzyk J. Group decision making with a fuzzy linguistic majority[J]. Fuzzy Sets and Syst, 1986, 18(1): 105-118.

[5] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Syst, 1984, 12(1): 117-131.

[6] Saaty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[7] 王应明, 傅国伟. 关于层次分析法中权的最小平方方法的理论证明[J]. 系统工程理论与实践, 1995, 15(1): 3-8.

[8] Ma J, Fan Z P, Huang L H. A subjective and objective integrated approach to determine attribute weights[J]. Euro J of Oper Res, 1999, 112(2): 397-404.