第16卷 第5期 控 制 与 决 策 2001年9月
Vol 16 No. 5 CONTROL AND DECISION Sept. 2001

文章编号: 1001-0920(2001)05-0595-04

一类线性参数变化时滞系统的H∞控制

郑连伟[1], 郭立山[2], 刘晓平[1]
(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘 要: 研究一类线性参数变化时滞系统的H_∞控制问题。这类系统的状态空间矩阵是一些时变参数的仿射函数,而这些时变参数是可以实时测量的。以线性矩阵不等式的形式给出了存在依赖于参数的动态输出反馈H_∞控制器的充分条件。当满足这些条件时,基于线性矩阵不等式的解可以构造出一种依赖于参数的动态输出反馈H_∞控制器。

关键词: 线性参数变化时滞系统; H_∞控制; 动态输出反馈; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP 13 **文献标识码**: A

H∞ Control for a Class of Linear Parameter-varying Systems with Time-delay

ZHENG Lian-wei[1], *GUO Li-shan*[2], *LIU Xiao-ping*[1]
(1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China;
2. School of Irrigation and Hydraulic Electricity, Hehai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The problem of H_∞ control for a class of linear parameter-varying systems with time-delay is studied. The state-space matrices of the systems are assumed to be affine functions of some time-varying parameters, which can be measured in real time during the system operation. Sufficient conditions for the existence of parameter-dependent dynamic output feedback H_∞ controllers are given in terms of linear matrix inequalities. Once these conditions are satisfied, such a controller can be constructed based on the solutions of the linear matrix inequalities.

Key words: linear parameter-varying systems with time-delay; H_∞ control; dynamic output feedback; linear matrix inequalities

1 引 言

线性参数变化系统是一类时变系统,其状态空间模型的矩阵是某些时变参数的确定函数,而这些时变参数是可以实时测量的,因而可用于反馈控制。许多实际系统都可用上述模型进行描述。近年来,针对上述系统,文献[1～3]相继给出了依赖于参数的动态输出反馈H_∞控制器设计方法。本文则考虑一类具有状态时滞的线性参数变化系统的H_∞控制问题,给出一种参数依赖型动态输出反馈H_∞控制器设计方法。

收稿日期: 1999-12-22; **修回日期**: 2000-07-05
基金项目: 国家自然科学基金项目(69974007); 教育部"跨世纪优秀人才培养计划"基金项目(199345)
作者简介: 郑连伟(1963—),男,辽宁新民人,副教授,博士,从事时滞系统的鲁棒控制研究; 刘晓平(1962—),男,黑龙江双城人,教授,博士生导师,从事非线性系统的鲁棒控制等研究。

2 系统描述

考虑如下线性参数变化时滞系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=\\&A(\theta(t))x(t)+A_1(\theta(t))x(t-d)+\\&B_1(\theta(t))w(t)+B_2(\theta(t))u(t)\end{aligned}\tag{1a}$$

$$\begin{aligned}&z(t)=\\&C_{11}(\theta(t))x(t)+C_{12}(\theta(t))x(t-d)+\\&D_{11}(\theta(t))w(t)+D_{12}(\theta(t))u(t)\end{aligned}\tag{1b}$$

$$\begin{aligned}&y(t)=\\&C_{21}(\theta(t))x(t)+C_{22}(\theta(t))x(t-\\&d)+D_{21}(\theta(t))w(t)\end{aligned}\tag{1c}$$

$$x(t)=\phi(t),\quad t\in[-d,0]\tag{1d}$$

其中, $x(t)\in R^n$ 是状态, $u(t)\in R^m$ 是控制, $y(t)\in R^r$ 是测量输出, $z(t)\in R^s$ 是控制输出, $d>0$ 是状态时滞, $\phi(t)$ 是连续初始向量函数, $A(\theta)$ 等矩阵是时变参数向量 $\theta(t)=(\theta_1(t),\cdots,\theta_k(t))\in R^k$ 的仿射矩阵函数。假设 $\theta(t)$ 可以实时测得, 并在下述集合内取值

$$\Theta=\{(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in R^k:\underline{\theta}_i\leq\theta_i\leq\overline{\theta}_i\}$$

引入具有 2^k 个元素的集合

$$\Theta_{\text{vex}}=\{(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in R^k:\theta_i=\underline{\theta}_i\ \text{or}\ \theta_i=\overline{\theta}_i\}$$

将 Θ_{vex} 中的点记为 θ^j, $j=1,\cdots,2^k$。容易证明, 对任何 $\theta(t)\in\Theta$, 存在 $\alpha_j(t)\geq 0$, $\sum_{j=1}^{2^k}\alpha_j(t)=1$, 使得 $\theta(t)=\sum_{j=1}^{2^k}\alpha_j(t)\theta^j$。设 $M(\theta)$ 是 θ 的仿射矩阵函数, $M^j=M(\theta^j)$, 则不难推得

$$M(\theta)=\sum_{j=1}^{2^k}\alpha_j M^j\tag{2}$$

本文的目的是对指定正数 γ, 设计如下依赖于参数的输出反馈控制器

$$\begin{cases}\dot{x}_c(t)=A_c(\theta(t))x_c(t)+B_c(\theta(t))y(t)\\u(t)=C_c(\theta(t))x_c(t)\end{cases}\tag{3}$$

其中 $x_c(t)\in R^n$, 使得闭环系统

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)=\\\overline{A}(\theta(t))\xi(t)+\overline{A}_1(\theta(t))\xi(t-\\d)+\overline{B}(\theta(t))w(t)\\z(t)=\\\overline{C}(\theta(t))\xi(t)+\overline{C}_1(\theta(t))\xi(t-\\d)+D_{11}(\theta(t))w(t)\end{cases}\tag{4}$$

对于某两个正定矩阵 $P>0$ 和 $S>0$, 以及任意 $\theta\in\Theta$, 满足

$$\begin{bmatrix}P\overline{A}+\overline{A}^{\mathrm T}P+S & P\overline{B} & \overline{C}^{\mathrm T} & P\overline{A}_1\\\overline{B}^{\mathrm T}P & -\gamma^2 I & D_{11}^{\mathrm T} & 0\\\overline{C} & D_{11} & -I & \overline{C}_1\\\overline{A}_1^{\mathrm T}P & 0 & \overline{C}_1^{\mathrm T} & -S\end{bmatrix}<0\tag{5}$$

由文献[4]知, 此时系统(4)渐近稳定, 且在零初始条件下, $\|z(t)\|_{L_2}\leq\gamma\|w(t)\|_{L_2}$。

3 主要结果

定理1 存在 B_c, C_c 为常数的控制器(3)和正定矩阵 $P>0$, $S>0$, 使得对任意 $\theta\in\Theta$, 式(5)成立, 当且仅当存在正定矩阵 $X>0$, $Y>0$, $S_{11}>0$, $S_{22}>0$ 以及矩阵 U, V, $Z(\theta)$, S_{12}, 使得对任意 $\theta\in\Theta$, 有

$$\begin{bmatrix}\Pi_{11} & A+Z^{\mathrm T}+S_{12} & \Pi_{13}\\A^{\mathrm T}+Z+S_{12}^{\mathrm T} & \Pi_{22} & \Pi_{23}\\\Pi_{13}^{\mathrm T} & \Pi_{23}^{\mathrm T} & \Pi_{33}\end{bmatrix}<0\tag{6}$$

并且

$$\begin{bmatrix}Y & I\\I & X\end{bmatrix}>0\tag{7}$$

控制器的矩阵可取为

$$C_c=VY(XY-I)^{-1},\quad B_c=-Y^{-1}U\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&A_c(\theta)=\\&[A(\theta)-B_cC_{21}(\theta)]XY(XY-I)^{-1}+\\&B_2(\theta)C_c-Y^{-1}Z(\theta)Y(XY-I)^{-1}\end{aligned}\tag{9}$$

其中

$$\Pi_{11}=AX+XA^{\mathrm T}+B_2V+V^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}+S_{11}$$

$$\Pi_{22}=A^{\mathrm T}Y+YA+UC_{21}+C_{21}^{\mathrm T}U^{\mathrm T}+S_{22}$$

$$\Pi_{13}=[B_1\quad XC_{11}^{\mathrm T}+V^{\mathrm T}D_{12}^{\mathrm T}\quad A_1X\quad A_1]$$

$$\begin{aligned}&\Pi_{23}=\\&[YB_1+UD_{21}\quad C_{11}^{\mathrm T}\quad YA_1X+UC_{22}X\quad YA_1+UC_{22}]\end{aligned}$$

$$\Pi_{33}=\begin{bmatrix}-\gamma^2 I & D_{11}^{\mathrm T} & 0 & 0\\D_{11} & -I & C_{12}X & C_{12}\\0 & XC_{12}^{\mathrm T} & -S_{11} & -S_{12}\\0 & C_{12}^{\mathrm T} & -S_{12}^{\mathrm T} & -S_{22}\end{bmatrix}$$

证明 必要性: 记

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\P_{12}^{\mathrm T} & P_{22}\end{bmatrix},\quad P_{12}\in R^{n\times n}$$

不妨设 P_{12} 是可逆的。定义

$$Y=P_{11}$$

$$Q=P_{11}P_{12}^{-\mathrm T}P_{22}P_{12}^{-1}P_{11}-P_{11}$$

$$X=Q^{-1}+Y^{-1}$$

$$T = \mathrm{diag}\{R, I, I, R\}$$

$$R = \begin{bmatrix} X & I \\ -P_{12}^{-1}P_{11}Q^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

将式(5) 中的矩阵左乘以 T^{T}, 右乘以 T, 并记

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22} \end{bmatrix} = R^{\mathrm{T}}SR$$

对控制器作状态变换 $x_c = -P_{12}^{-1}P_{11}\hat{x}_c$, 并定义

$$U = -YB_c,\quad V = C_cQ^{-1} \tag{10}$$

$$Z(\theta) = Y[A(\theta) - B_cC_{21}(\theta)]X + Y[B_2(\theta)C_c - A_c(\theta)]Q^{-1} \tag{11}$$

经简单的矩阵运算可得式(6)。不难推得 $P > 0$ 等价于式(7)。由式(10) 和(11) 可得式(8) 和(9), 因此必要性得证。

充分性: 将必要性的证明过程反过来便可得到充分性的证明。(证毕)

下面在式(6) 中取 $S_{11} = \epsilon X^2$, $S_{12} = 0$, 利用线性矩阵不等式给出式(6) 有解的充分条件。

定理 2　如果对于某个正数 ϵ, 正定矩阵 $X > 0$, $Y > 0$, $S_{22} > 0$ 以及矩阵 U, V 对任意 $\theta \in \Theta_{\mathrm{vex}}$, 均为如下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & X \\ W_{12}^{\mathrm{T}} & W_{22} & 0 \\ X & 0 & -\epsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{22} & \overline{W}_{12} \\ \overline{W}_{12}^{\mathrm{T}} & W_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

的解, 则存在 $Z(\theta)$, 它和 $X, Y, S_{22}, U, V, S_{11} = \epsilon X^2$, $S_{12} = 0$ 对任意 $\theta \in \Theta$, 都是式(6) 的解; 而且 $Z(\theta)$ 可按式(2) 表示为 Z^j 的凸组合。其中

$$W_{11} = AX + XA^{\mathrm{T}} + B_2V + V^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}$$

$$W_{12} = [B_1 \quad XC_{11}^{\mathrm{T}} + V^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}} \quad A_1 \quad A_1]$$

$$\overline{W}_{12} = [YB_1 + UD_{21} \quad C_{11}^{\mathrm{T}} \quad YA_1 + UC_{22} \quad YA_1 + UC_{22}]$$

$$W_{22} = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ D_{11} & -I & C_{12} & C_{12} \\ 0 & C_{12}^{\mathrm{T}} & -\epsilon I & 0 \\ 0 & C_{12}^{\mathrm{T}} & 0 & -S_{22} \end{bmatrix}$$

$$Z^j = -(A^j)^{\mathrm{T}} + \Pi_{23}^j(\bar{\Pi}_{33}^j)^{-1}(\Pi_{13}^j)^{\mathrm{T}} + (\Phi^j)^{1/2}T^j(\Psi^j)^{1/2},\quad j = 1, \cdots, 2^k$$

$$\Phi^j := -\Pi_{22}^j + \Pi_{23}^j(\bar{\Pi}_{33}^j)^{-1}(\Pi_{23}^j)^{\mathrm{T}} > 0$$

$$\Psi^j := -\bar{\Pi}_{11}^j + \Pi_{13}^j(\bar{\Pi}_{33}^j)^{-1}(\Pi_{13}^j)^{\mathrm{T}} > 0$$

T^j 为满足 $\|T^j\| < 1$ 的任意矩阵, $\bar{\Pi}_{11}$ 和 $\bar{\Pi}_{33}$ 分别由在 Π_{11} 和 Π_{33} 中取 $S_{11} = \epsilon X^2$ 和 $S_{12} = 0$ 得到。

证明　由文献[5] 知, 存在 $Z(\theta)$ 使得对任意 $\theta \in \Theta$, 式(6) 成立, 而且 $S_{11} = \epsilon X^2$, $S_{12} = 0$ 的充分必要条件为对任意 $\theta \in \Theta$, 有

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11} & \Pi_{13} \\ \Pi_{13}^{\mathrm{T}} & \bar{\Pi}_{33} \end{bmatrix} < 0,\quad \begin{bmatrix} \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{23}^{\mathrm{T}} & \bar{\Pi}_{33} \end{bmatrix} < 0$$

利用矩阵的合同变换和 Schur 补公式, 可知这两个不等式与式(12) 和(13) 等价。由于 θ 在式(12) 和(13) 中是仿射的, 因而式(12) 和(13) 对任意 $\theta \in \Theta$ 均成立, 当且仅当对任意 $\theta \in \Theta_{\mathrm{vex}}$ 成立。对式(6) 反复应用 Schur 补公式, 并取 $S_{11} = \epsilon X^2$ 和 $S_{12} = 0$, 便可得到 Z^j 的表达式[5]。(证毕)

注 1　当 $\theta \in \Theta_{\mathrm{vex}}$ 时, 式(12) 和(13) 分别给出了 2^k 个线性矩阵不等式。由定理 2 知, 通过联合求解线性矩阵不等式(7), (12) 和(13) 可得不等式(6) 和(7) 的一组公共解, 从而由式(8) 和(9) 可以得到控制器(3) 的矩阵。

4　应用举例

取 $\gamma = 1$。考虑线性参数变化时滞系统(1), 其中

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -2 & 1 - 0.5\theta_1 \\ -1 & 1 + \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$A_1(\theta) = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 + 0.4\theta_1 \\ 0.2 & 0.5 + 0.1\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad B_2(\theta) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + 0.5\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = [-0.4 \quad -0.2]$$

$$C_{12} = [0 \quad 0]$$

$$D_{11} = 0.1,\quad D_{12} = 1$$

$$C_{21}(\theta) = \begin{bmatrix} 3 & 1 + 0.5\theta_1 \\ 1 & 3 + 0.2\theta_1 \end{bmatrix},\quad C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad |\theta_1| \le 1$$

在定理 2 中取 $\epsilon = 1.5$, $T^1 = T^2 = 0$, 经计算可得控制器(3) 的矩阵为

$$A_c(\theta) = \begin{bmatrix} -13.4831 + 0.8596\theta_1 & -19.4534 + 9.0514\theta_1 \\ -4.0697 + 0.9915\theta_1 & -22.8819 + 1.6497\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 1.2959 & 4.9480 \\ 0.1011 & 3.1433 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [0.8815 \quad -11.2107]$$

5 结 语

本文研究一类线性参数变化时滞系统的H_∞控制问题。利用其参数可以实时测量的特点,基于线性矩阵不等式的解构造出一种依赖于参数的动态输出反馈H_∞控制器。该控制器能保证闭环系统渐近稳定,而且从干扰输入到控制输出的H_∞范数不超过预期指标。

参考文献:

[1] Apkarian P, Gahinet P. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 40(5): 853-864.

[2] Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: A design example[J]. Automatica, 1995, 31(9): 1251-1261.

[3] Kose I E, Jabbari F, Schmitendorf W E. A direct characterization of L_2-gain controllers for LPV systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(9): 1302-1307.

[4] Kokame H, Kobayashi H, Mori T. Robust performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(2): 223-226.

[5] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control[J]. Int J Rob and Nonl Contr, 1994, 4: 421-448.

(上接第594页)

5 结 论

隐层神经元冗余是神经网络容错的有效手段之一,但对RBF神经网络容错的研究则很少。而一些研究[7]曾得出网络的容错能力与隐层节点成反比的结论,这使得隐层节点冗余方法受到了怀疑。为此,本文提出一种RBF神经网络隐层节点冗余结构,对RBF网络中隐层节点冗余在单故障下和普遍故障下的情形进行分析研究。

本文证明了在所提出的隐层节点冗余结构下,无论是在单故障情况下还是在普遍故障情况下,RBF网络的输出均方差均随着冗余数的增加而降低。因此按这种结构对网络的隐层节点进行冗余容错是可行的。本文提出的冗余结构能使网络在无故障时保持误差,推广能力等性能保持不变,在发生故障时能有效地减小RBF神经网络的输出误差。

本文提出的RBF神经网络隐层冗余的方法,优化了冗余节点的选择,是一种简便有效的实用方法。仿真实验证明这种方法是有效的。

参考文献:

[1] Philippe Kerlinzin, Philippe Refregier. Theoretical investigation of the robustness of multilayer perceptrons: Analysis of the linear case and extension to nonlinear networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1995, 6(3): 560-571.

[2] Behnam S Arad, Ahmed El Anway. On fault tolerant training of feedforward neural networks[J]. Neural Networks, 1997, 10(3): 539-557.

[3] Dipti Deodhare, M Vidyasagar, S Sathiya Keerthi. Synthesis of fault-tolerant feedforward neural networks using minimax optimization[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1998, 9(5): 891-900.

[4] D S Phatak, I Koren. Complete and partial fault tolerance of feedforward neural nets[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1995, 6(2): 446-456.

[5] D S Phatak, I Koren. Fault tolerance of feedforward neural nets for classification tasks[A]. IEEE Proc of the 1992 Int Joint Conf of Neural Networks[C]. Nagoya, 1992. Ⅱ: 386-391.

[6] 许荔秦,胡东成. 一种新的前向神经网络部件冗余容错方法[J]. 电子学报, 2000, 28(5): 99-101.

[7] 张涛. 人工神经网络容错性分析与设计的理论和应用[D]. 北京: 清华大学自动化系, 1999.