第16卷第5期 控 制 与 决 策 2001年9月
Vol. 16 No. 5 CONTROL AND DECISION Sept. 2001

文章编号: 1001-0920(2001)05-0605-04

一类不确定线性系统的鲁棒线性控制器设计

王银河, 戴冠中
(西北工业大学 自动控制系, 陕西 西安 710072)

摘 要: 针对一类不确定性不满足匹配条件的线性系统, 利用Lyapunov方程和不确定项的范数界, 分别设计了具有可调参数的鲁棒线性状态和输出控制器。这些可调参数可以依据不确定项的范数界的大小来选取, 具有一定的灵活性。

关键词: 鲁棒线性控制器; 不确定系统; 界函数
中图分类号: TP 273 **文献标识码**: A

Design of Robust Linear Controllers for Linear Systems with Uncertainties

WANG Yin-he, DAI Guan-zhong
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi′an 710072, China)

Abstract: Robust linear state feedback and output feedback controllers are proposed for a class of linear systems with uncertainties which do not satisfy matching conditions. By using the Lyapunov equation and bound functions of the norm of the uncertainties, the robust linear control laws with adjustable parameters are synthesized. These adjustable parameters can be changed according to the sizes of the given bound functions, which possesses flexibility.

Key words: robust linear controller; uncertain system; bound function

1 引言与引理

对于具有不确定性的线性系统设计稳定控制器, 目前已经取得许多成果[1~4]。在这些成果中, 所设计的稳定控制器具有3种形式: 非线性光滑控制器, 变结构控制器和线性控制器。线性控制器是一种最便于应用的控制器, 从应用的角度考虑, 在尽可能弱的条件下, 如何设计出鲁棒线性控制器是一项具有实际意义的工作。在上述成果中, 有关鲁棒线性控制器的设计要么完全依据不确定性满足匹配条件的假设, 要么完全依据一个具有复杂形式且其正定矩阵解是否存在尚且未知的Riccati方程。显然, 这些前提假设影响了结果的实际应用。

本文考虑一类具有不确定性的线性系统, 其不确定项不要求满足匹配条件, 只需用已知的界函数界定。鲁棒线性状态和输出控制器的设计完全依据一个可解的Lyapunov方程, 并且所设计的鲁棒线性控制器含有可调参数, 这些可调参数可以依据不确定项的界函数的大小来选取。因而, 所设计的鲁棒线性控制器更具有实用性。

收稿日期: 2000-06-07; **修回日期**: 2000-08-31
基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(G1998030417); 内蒙古高等学校科学研究项目(2D0002)
作者简介: 王银河(1962—), 男, 内蒙古包头人, 副教授, 博士后, 从事复杂系统的结构分析、鲁棒控制等研究; 戴冠中(1937—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事现代控制理论与计算机控制技术的研究。

以下用 $M_n(R)$ 和 $M_{m,n}(R)$ 分别表示 $n\times n$ 和 $m\times n$ 实矩阵组成的集合。设 $A,B\in M_n(R)$, $A>B$ 表示 $A-B$ 是正定矩阵。

引理 1[5] 设对称矩阵 $A\in M_n(R)$ 有以下对称分解

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}\end{bmatrix},\quad A_{11}\in M_r(R)$$

则 $A>0$ 的充分必要条件是 $A_{11}>0$, 且 $A_{22}>A_{12}^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}A_{12}$。

由引理 1 容易得到如下引理:

引理 2 设 $A\in M_n(R)$, $C\in M_m(R)$, $B\in M_{n,m}(R)$, $A,C>0$, 如果 $C-B^{\mathrm{T}}A^{-1}B>0$, 则对 $\forall x\in R^n$, $y\in R^m$, 有 $2|x^{\mathrm{T}}By|\le x^{\mathrm{T}}Ax+y^{\mathrm{T}}Cy$。

2 鲁棒状态反馈控制设计

考虑下列不确定系统

$$\dot{x}=Ax+\Delta f(x,t)+B(u+\Delta g(x,t)) \tag{1}$$

这里, 状态 $x\in R^n$, 输入 $u\in R^m$, A 和 B 是适合维数的常矩阵, $\Delta f(x,t)$ 和 $\Delta g(x,t)$ 是不确定项(或干扰)。

注 1 系统(1) 中的 $\Delta g(x,t)$ 表示输入通道的不确定性。在具体处理上, 为了减少保守性, 我们将对 $\Delta f(x,t)$ 和 $\Delta g(x,t)$ 分别进行处理。

假定 1 存在矩阵 K, 使 $A+BK$ 是 Hurwitz 稳定矩阵。

注 2 如果假定 1 成立, 那么对于一个给定的正定矩阵 Q, 下列 Lyapunov 方程具有唯一的正定矩阵解 P, 即

$$(A+BK)^{\mathrm{T}}P+P(A+BK)=-Q \tag{2}$$

假定 2 不确定项满足下列条件

$$\|\Delta f(x,t)\|\le a(x)\|x\|$$
$$\|\Delta g(x,t)\|\le b(x)\|x\|$$

其中, $a(x)$ 和 $b(x)$ 是非负连续函数, $\|*\|$ 表示欧氏范数。

选取

$$\delta\in\{\delta\,|\,\delta>0.5\times[\sqrt{\lambda_{\min}^2(PBB^{\mathrm{T}}P)+4\lambda_{\max}^2(P^2)}-\lambda_{\min}(PBB^{\mathrm{T}}P)]\} \tag{3}$$

其中, P 由式(2) 确定, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示相应矩阵的最大和最小特征值。

注 3 当增益矩阵 B 列满秩时(这在大多数情况下是真的), $\lambda_{\min}(PBB^{\mathrm{T}}P)=0$, δ 的选择范围简化为 $\delta>\lambda_{\max}(P)$。

对于系统(1), 我们提出下列鲁棒状态反馈线性控制器

$$\begin{cases}u=u^a+u^b+u^c\\ u^a=Kx,\quad u^b=-0.5\epsilon^2B^{\mathrm{T}}Px\\ u^c=-0.5\sigma^2B^{\mathrm{T}}Px\end{cases} \tag{4}$$

这里 ϵ 和 σ 是满足 $0<\epsilon^2<\lambda_{\min}(Q)/\delta$, $\sigma>0$ 的可调参数。

注 4 由式(4) 可以看出, 线性控制器由 3 部分组成。第 1 部分保证了系统(1) 的标称系统的稳定性; 其余两部分由下面定理 1 的证明可以看出是用来克服系统的干扰。其中的可调参数可以根据控制器增益及不确定性的大小要求来选取。

定理 1 考虑系统(1), 如果假定 1, 2 和下列条件成立

$$a^2(x)+\frac{\epsilon^2}{\delta\sigma^2}b^2(x)\le\left(\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\delta}-\epsilon^2\right)\epsilon^2 \tag{5}$$

那么系统(1) 经由线性控制器(4) 在平衡点 $x=0$ 处一致渐近稳定。

注意到当 $\epsilon^2=\lambda_{\min}(Q)/2\delta$ 时, $(\lambda_{\min}(Q)/\delta-\epsilon^2)\epsilon^2$ 有最大值 $(\lambda_{\min}(Q)/2\delta)^2$, 因此选取 $\sigma^2=\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\delta^2}\gamma$, 其中 $\gamma>0$。由定理 1, 可以得到如下推论:

推论 1 考虑系统(1), 如果假定 1, 2 和下列条件成立

$$a^2(x)+\frac{1}{\gamma}b^2(x)<\left(\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\delta}\right)^2 \tag{6}$$

那么系统(1) 可经由下列线性控制器在平衡点 $x=0$ 处一致渐近稳定。

$$\begin{cases}u=u^a+u^b+u^c\\ u^a=Kx\\ u^b=-\dfrac{\lambda_{\min}(Q)}{4\delta}B^{\mathrm{T}}Px\\ u^c=-\dfrac{\lambda_{\min}(Q)}{4\delta^2}\gamma B^{\mathrm{T}}Px\end{cases} \tag{7}$$

注 5 由定理 1 及推论 1 可以看出, 条件(5), (6) 是较易验证的, 它决定了系统的镇定域大小。与控制器(4) 比较而言, 控制器(7) 的缺点是其增益大小不易得到调整。但是它能容忍更大范围的干扰, 因而具有较强的鲁棒性。

定理 1 的证明 由系统 (1) 和控制器(4) 构成的闭环系统为

$$\dot{x}=Ax+\Delta f(x,t)+B(u^a+u^b+u^c+\Delta g(x,t)) \tag{8}$$

考虑正定函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$, 其中 P 由式(2) 确定。由假定 1, 控制器(4) 和 Lyapunov 方程(2), 得到

$$\begin{cases}(Ax+Bu^a)^{\mathrm T}Px+x^{\mathrm T}P(Ax+Bu^a)=-x^{\mathrm T}Qx\\ 2x^{\mathrm T}PBu^b=-\epsilon^2x^{\mathrm T}(PBB^{\mathrm T}P+\delta I)x+\epsilon^2x^{\mathrm T}\delta Ix\\ 2x^{\mathrm T}PBu^c=-\sigma^2x^{\mathrm T}PBB^{\mathrm T}Px\end{cases}\tag{9}$$

由假定 2, 引理 2 知, 如果

$$\delta I-P(\delta I+PBB^{\mathrm T}P)^{-1}P>0\tag{10}$$

注意到不等式 $2ab\le a^2+b^2$, 则有下列结果成立

$$\begin{cases}2x^{\mathrm T}P\Delta f(x,t)\le\\ \epsilon^2x^{\mathrm T}(\delta I+PBB^{\mathrm T}P)x+\dfrac{\delta}{\epsilon^2}a^2(x)\|x\|^2\\ 2x^{\mathrm T}PB\Delta g(x,t)\le\\ \sigma^2x^{\mathrm T}PBB^{\mathrm T}Px+\dfrac{1}{\epsilon^2}b^2(x)\|x\|^2\end{cases}\tag{11}$$

由式(8)～(11) 可以看出, 如果条件(10) 成立, 那么 $V(x)$ 沿系统(8) 的时间导数为

$$\dot V(x)\le-\left[\left(\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\delta}-\epsilon^2\right)\epsilon^2-a^2(x)-\frac{\epsilon^2}{\delta\sigma^2}b^2(x)\right]\frac{\delta}{\epsilon^2}\|x\|^2\tag{12}$$

如果选取 δ 满足

$$\delta^2+\delta\lambda_{\min}(PBB^{\mathrm T}P)-\lambda_{\max}(P^2)>0\tag{13}$$

那么条件(10) 得到满足。注意到式(13) 等价于式(3), 于是定理 1 得证。

3 鲁棒输出反馈控制设计

考虑下列带有输出的不确定系统

$$\begin{cases}\dot x=Ax+\Delta f(x,t)+B(u+\Delta g(x,t))\\ y=Cx\end{cases}\tag{14}$$

其中, 输出 $y\in R^m$, 其余符号说明与系统(1) 相同。

假定 3 存在矩阵 K, 使 $A+BKC$ 是 Hurwitz 稳定阵。

注 6 如果假定 3 成立, 那么对于一个给定的正定矩阵 Q, 下列 Lyapunov 方程具有唯一的正定矩阵解 $\bar P$, 即

$$(A+BKC)^{\mathrm T}\bar P+\bar P(A+BKC)=-Q\tag{15}$$

假定 4 不确定项满足下列范数条件

$$\|\Delta f(x,t)\|\le\bar a(x,y)\|y\|$$
$$\|\Delta g(x,t)\|\le\bar b(x,y)\|y\|$$

其中, $\bar a(x,y)$ 和 $\bar b(x,y)$ 是非负连续函数, $\|*\|$ 表示欧氏范数。

注 7 在系统(14) 的输出反馈控制器的设计研究中[6], 条件“存在一个 $m\times m$ 阶可逆矩阵 F 满足 $\bar PB=C^{\mathrm T}F^{\mathrm T}$”是必不可少的假设条件之一。显然, 这样的矩阵 F 在大多数情况下是不存在的。因此, 给出一个不含此条件的可行的鲁棒输出反馈控制器设计方法是完全必要的。

选取 $m\times m$ 矩阵 D, 由于 $\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P$ 是对称矩阵, 因此存在正数 λ 使 $\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P+\lambda I$ 是正定矩阵。选取

$$\begin{cases}\lambda_0\in\{\lambda\,|\,\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P+\lambda I>0\}\\ \bar\delta\in\{\delta\,|\,\delta>\max(\delta_0,\lambda_0)\}\end{cases}\tag{16}$$

其中

$$\delta_0=0.5\left[\sqrt{\lambda_{\min}^2(\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P)+4\lambda_{\max}^2(\bar P^2)}-\lambda_{\min}(\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P)\right]\tag{17}$$

矩阵 $\bar P$ 由式(15) 确定。

对于系统(14), 我们提出以下线性鲁棒控制器

$$\begin{cases}u=u^a+u^b\\ u^a=Ky\\ u^b=-2\bar\epsilon Dy\end{cases}\tag{18}$$

其中, $\bar\epsilon$ 是满足 $0<\bar\epsilon<\lambda_{\min}(Q)/2\bar\delta$ 的可调参数, $m\times m$ 阶矩阵 D 可以根据实际需要选取。

定理 2 考虑系统(14), 如果假定 3, 4 和下列条件成立

$$\lambda_{\max}(C^{\mathrm T}C)[\bar a^2(x,y)+\lambda_{\max}(B^{\mathrm T}B)\bar b^2(x,y)]<(\lambda_{\min}(Q)/\bar\delta-2\bar\epsilon)\bar\epsilon\tag{19}$$

那么系统(14) 经由线性控制器(18) 在平衡点 $x=0$ 处一致渐近稳定。

证明 由系统(18) 和控制器(19) 组成的闭环系统为

$$\dot x=Ax+\Delta f(x,t)+B(u^a+u^b+\Delta g(x,t)),\quad y=Cx\tag{20}$$

考虑正定函数 $V(x)=x^{\mathrm T}\bar Px$。由假定 3, 控制器(18) 和 Lyapunov 方程(15), 可得下列等式

$$(Ax+Bu^a)^{\mathrm T}\bar Px+x^{\mathrm T}\bar P(Ax+Bu^a)=-x^{\mathrm T}Qx\tag{21}$$

$$2x^{\mathrm T}\bar PBu^b=-2\bar\epsilon x^{\mathrm T}(\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P+\bar\delta I)x+2\bar\epsilon x^{\mathrm T}\bar\delta Ix\tag{22}$$

由假定 4 和引理 2, 可知如果

$$\bar\delta I-\bar P(\bar\delta I+\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P)^{-1}\bar P>0\tag{23}$$

那么下列不等式成立

$$2x^{\mathrm T}\bar P\Delta f(x,t)\le\bar\epsilon x^{\mathrm T}(\bar\delta I+\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P)x+\frac{\bar\delta}{\bar\epsilon}\bar a^2(x,y)\|y\|^2\tag{24}$$

$$2x^{\mathrm T}\bar PB\Delta g(x,t)\le\bar\epsilon x^{\mathrm T}(\bar\delta I+\bar PBDC+C^{\mathrm T}D^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\bar P)x+$$

$$\frac{\bar{\delta}}{\epsilon}\lambda_{max}(BB^T)\bar{b}^2(x,y)\|y\|^2 \quad (25)$$

由式(21)～(25)及$\bar{\delta}>\lambda_0$，如果式(23)成立，则$V(x)$沿系统(20)的时间导数为

$$\mathring{V}(x)\le -\Big[\Big(\frac{\lambda_{min}(Q)}{\bar{\delta}}-2\bar{\epsilon}\Big)\bar{\epsilon}-\lambda_{max}(C^TC)\bar{a}^2(x,y)-\lambda_{max}(B^TB)\lambda_{max}(C^TC)\bar{b}^2(x,y)\Big]\frac{\bar{\delta}}{\epsilon}\|x\|^2 \quad (26)$$

注意到如果$\bar{\delta}>\lambda_0$，$\bar{\delta}$按下列条件选取

$$\bar{\delta}^2+\bar{\delta}\lambda_{min}(\bar{P}BDC+C^TD^TB^T\bar{P})-\lambda_{max}(\bar{P}^2)>0 \quad (27)$$

那么式(26)成立，$\bar{\delta}>\lambda_0$和式(27)等价于式(16)。于是定理2得证。

注意到$(\lambda_{min}(Q)/\bar{\delta}-2\bar{\epsilon})\bar{\epsilon}$当$\bar{\epsilon}=\lambda_{min}(Q)/4\bar{\delta}$时，有最大值$2(\lambda_{min}(Q)/4\bar{\delta})^2$，因此由定理2可得下列推论：

推论2 考虑系统(14)，如果假定3,4和下列条件成立

$$\lambda_{max}(C^TC)[\bar{a}^2(x,y)+\lambda_{max}(B^TB)\bar{b}^2(x,y)]<2(\lambda_{min}(Q)/4\bar{\delta})^2 \quad (28)$$

那么系统(14)经由下列线性输出反馈控制器在平衡点$x=0$处一致渐近鲁棒镇定。

$$\begin{cases} u=u^a+u^b \\ u^a=Ky \\ u^b=-\dfrac{\lambda_{min}(Q)}{2\bar{\delta}}Dy \end{cases} \quad (29)$$

注8 条件(19)，(28)容易得到检验。可调矩阵D的选取应保证式(19)，(28)成立，并兼顾控制器(18)，(29)具有合适的增益。

4 结 论

通过使用合适的代数方法和Lyapunov方法，针对带有不确定性的线性系统，只需利用不确定项的界函数和标称系统的稳定信息，便可设计出简单的线性鲁棒控制器。这种控制器由功能特点明显的部分组成，它所具有的可调参数可以根据不确定性和控制增益的大小来选取，具有一定的灵活性。特别是对于带有输出的系统，这种控制器避免了检验类似于文献[6]中的条件，具有容易验证条件的特点。

参考文献：

[1] IR Petersen. A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1985, 30(9): 1412-1420.

[2] IR Petersen, C K Hollot. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica, 1986, 22(7): 762-769.

[3] W E Schmitendorf. Designing stabilizing controllers for uncertain systems using the Riccati equation approach [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1988, 33(4): 376-379.

[4] Juergen, Ackermann, Vadim Utkin. Sliding mode control design based on Ackermann's formula[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(2): 234-237.

[5] M Marcus, H Minc. A survey of matrix theorem and matrix inequalities[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1964.

[6] X G Yan, S Y Zhang. Decentralized output feedback robust stabilization for a class of nonlinear interconnected system with similarity[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(2): 294-299.

(上接第601页)

参考文献：

[1] 冯纯伯. 反馈系统的无源性分析及其应用[J]. 自动化学报, 1985, 11(2): 111-117.

[2] 冯纯伯. 应用无源性研究时变非线性系统的稳定性[J]. 自动化学报, 1997, 23(6): 775-781.

[3] 冯纯伯, 张侃健, 费树岷. 基于无源性分析的鲁棒控制系统设计[J]. 自动化学报, 1999, 25(5): 577-582.

[4] Mei S W, Shen T L. Passivation control of nonlinear systems with disturbance[J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(6): 797-801.

[5] Lin W. Global robust stabilization of minimum-phase nonlinear systems with uncertainty[J]. Automatica, 1997, 33(3): 453-459.

[6] Lin W, Shen T L. Robust passivity and feedback design for minimum-phase nonlinear systems with structural uncertainty[J]. Automatica, 1999, 35(1): 35-47.

[7] Isdori A. Dissipative inequalities in nonlinear H_∞ control[A]. Proc 31st Conf Decision Control[C]. Tucson, 1992. 3265-3270.

[8] 申铁龙. H_∞控制理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 1996.