

文章编号: 1001-0920(2001) 05-0609-04

参数不确定系统的鲁棒灵敏度设计

李连锋, 王广雄

(哈尔滨工业大学 控制工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 应用 Schur 补公式讨论了参数不确定系统的灵敏度问题, 给出了灵敏度的设计方法。指出灵敏度设计不同于扰动抑制的设计, 求解灵敏度应首先求解一个输出注入问题。最后用算例说明了该方法的有效性。

关键词: 灵敏度; 线性矩阵不等式; 多面体不确定性; 输出注入

中图分类号: TP 273

文献标识码: A

Robust Sensitivity Design for Systems with Parameter Uncertainty

LI Lian-feng, WANG Guang-xiong

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The sensitivity design problem for the system with parameter uncertainty is considered by using the Schur complement formula. It is pointed out that the sensitivity design is different from that of the disturbance attenuation. Also it is pointed out that the first step of solving the sensitivity problem is to solve an output injection problem. A design example is also given.

Key words: sensitivity; LMI; polytopic uncertainty; output injection

1 引言

对参数不确定系统, 一般都按二次镇定来考虑。对不确定性的处理, 近年来的许多研究大多集中在范数有界的不确定性和相应的标定 H 问题上^[1, 2]。由于求解 LMI 问题的凸优化方法的出现, 使得人们为避免保守性, 对不确定性采用多面体模型, 通过求解不确定顶点处的 LMI 来得到所要求的控制器。文献[3] 讨论了这类系统的输出反馈问题, 但它主要适用于扰动抑制问题。扰动抑制是对对象输入端扰动的抑制, 通常用输出与输入的比值 γ 表示, 这个 γ 值一般是很小的。

系统设计中还常有灵敏度的要求。灵敏度定义

为闭环传递函数 T 的相对变化与引起该变化的对象 G 相对变化的比值, 即

$$S = \frac{dT/T}{dG/G} = \frac{1}{1 + GK} \quad (1)$$

其中 K 为控制器。式(1) 表明灵敏度函数 S 等于从对象输出端扰动到系统输出的传递函数。因此, 灵敏度既表示了闭环系统对对象变化的敏感程度, 也反映了系统对输出端扰动的抑制性能。灵敏度是系统设计中一个重要的性能指标, 要求越小越好。但从式(1) 可以看出, 高频段 $GK \ll 1$, $S \approx 1$, 故输出与输入的比值(H 范数) $\gamma \approx 1$ 。文献[3] 假设 γ 任意小, 因而主要适用于对输入端扰动的抑制问题。本文则利用 Schur 补公式给出了此参数不确定系统灵敏度问

收稿日期: 2000-06-07; 修回日期: 2000-09-18

基金项目: 高等学校博士点基金项目(96021314); 211 工程项目

作者简介: 李连锋(1974—), 男, 河南南阳人, 博士生, 从事鲁棒控制和 H 控制研究; 王广雄(1933—), 男, 上海人, 教授,

博士生导师, 从事 H 控制、高精度伺服系统等研究。© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

题的设计方法。

2 输出反馈问题的解

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1 w + (B_2 + \Delta B)u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = (C_2 + \Delta C)x + D_{21} w \end{cases} \quad (2)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $z(t)$ 和 $y(t)$ 为被控输出和测量输出, $u(t) \in R^m$ 为控制输入, $w(t) \in R^p$ 为干扰量。设名义系统 (A, B_2, C_2) 为可镇定可检测的; 并设 $\Delta A, \Delta B$ 和 ΔC 为多面体不确定性, 即 $\Delta A, \Delta B$ 和 ΔC 为时变向量 $r(t)$ 的线性函数, $r(t) \in R^s$, 且属于如下紧集

$$r(t) \in \mathcal{R} \\ \{r(t) : \exists \bar{r}_i(t) \quad \bar{r}_i, \forall i = 1, 2, \dots, s\}$$

设控制器为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases} \quad (3)$$

以下均假设 $\sigma_{\max}(D_{11}) < \gamma$, 输出反馈控制器为式(3)所示的形式。

定理 1^[3] 系统(2)在控制器(3)的作用下闭环二次稳定且 L_2 增益小于 γ , 当且仅当存在 $Y > 0, X > 0, L, W_o$ 和 W_c , 使得对所有的 $r \in \mathcal{R}$ 有

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_2 \\ C_1 & C_1 X + D_{12} W_c \\ B_1^T Y + D_{21}^T W_o & B_1^T \\ C_1^T & Y B_1 + W_o D_{21} \\ X C_1^T + W_c^T D_{12}^T & B_1 \\ -Y I & D_{11} \\ D_{11}^T & -Y I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0 \quad (5)$$

成立, 其中

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= Y(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T Y + \\ &\quad W_o(C_2 + \Delta C) + (C_2 + \Delta C)^T W_o^T \\ \Phi_2 &= L + Y \Delta A X + Y \Delta B W_c + \\ &\quad W_o \Delta C X + \Delta A^T \\ \Phi_2 &= (A + \Delta A)X + X(A + \Delta A)^T + \\ &\quad (B_2 + \Delta B)W_c + W_c^T(B_2 + \Delta B)^T \end{aligned}$$

进而, 当不等式条件满足时, 控制器(3)可由

$$\begin{cases} W_c = C_c X, \quad W_o = -S B_c \\ L = Y A X + Y B_2 W_c - S A_c X + \\ \quad W_o C_2 X + A^T \\ S = Y - X^{-1} > 0 \end{cases} \quad (6)$$

得到。由于式(4)中存在双线性形式(如 $Y \Delta A X$), 使其不是 LMI 问题, 不能直接应用凸优化方法求解。

定理 1 中的 γ 为从扰动 w 到输出端 z 的扰动衰减比, 该值一般很小。文献[3]基于 γ 可以任意小的假设, 给出并证明了该输出反馈问题分两步求解的方法。

3 输出鲁棒灵敏度设计

在输出灵敏度问题中, 外扰动作用在对象的输出端, 即式(2)中的 $B_1 = 0$, 所以有

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + (B_2 + \Delta B)u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = (C_2 + \Delta C)x + D_{21} w \end{cases} \quad (7)$$

于是, 文献[3]的第 1 步便失去意义。

为求解输出端灵敏度问题, 对式(4)左端做合同变换: 互换 1, 2 行和 1, 2 列; 互换 3, 4 行和 3, 4 列, 得到

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \\ B_1^T & B_1^T Y + D_{21}^T W_o^T \\ C_1 X + D_{12} W_c & C_1 \\ \hline B_1 & X C_1^T + W_c^T D_{12}^T \\ Y B_1 + W_o D_{21} & C_1^T \\ -Y I & D_{11}^T \\ D_{11} & -Y I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (8)$$

式(8)与(4)等价。

注意到式(8)中存在 LMI 形式的子块, 可利用 Schur 补公式^[4]求解。根据 Schur 补公式, 要求不等式(8)成立, 应先要求不等式

$$\begin{bmatrix} Y(A + \Delta A) + \\ (A + \Delta A)^T Y + \\ W_o(C_2 + \Delta C) + \\ (C_2 + \Delta C)^T W_o^T & Y B_1 + W_o D_{21} & C_1^T \\ B_1^T Y + D_{21}^T W_o^T & -Y I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -Y I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (9)$$

成立。注意到式(9)也是输出注入问题^[5]的不等式(证明略), 该不等式为 LMI 形式, 可以进行求解。求

得 W_o 和 Y 后, 式(8) 已成为线性不等式, 这样便可以求解了。

集合 \mathcal{R} 的顶点集合为

$$\mathcal{R}_{\text{opt}} = \{r: r_i = \underline{r}_i \text{ or } r_i = \bar{r}_i, \forall i = 1, 2, \dots, s\}$$

\mathcal{R}_{opt} 中共有 2^s 个顶点。当 LMI 中含有系统矩阵 $A + \Delta A, B_2 + \Delta B$ 和 $C_2 + \Delta C$ 时, 如果 $\Delta A, \Delta B$ 和 ΔC 为时变向量 $r(t)$ 的线性函数, 则同时求解 2^s 个顶点处的 LMI 约束便能得到满足含有不确定块的 LMI 的解^[6]。

求解灵敏度问题, 相当于首先求解一个输出注入问题, 这一步决定了输出灵敏度问题控制性能可以达到的最优值; 然后求解一般输出反馈问题(8), 由于式(8) 包含了控制器(3) 的动态特性和对象的输入特性 B_2 , 一般不能恢复到输出注入(9) 的最优 \mathcal{Y} 值, 这时就要增加 \mathcal{Y} 值, 重复上述计算过程。

4 算 例

对输出灵敏度问题, 以一个直升机模型为背景^[7], 即

$$A + \Delta A(r) =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 \\ 0.0482 & -1.01 \\ 0.1002 & 0.2855 + r_1(t) \\ 0 & 0 \\ 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0024 & -4.0208 \\ -0.707 & 1.3229 + r_2(t) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [0.4422 \quad 3.0447 \quad -5.52 \quad 0]^T$$

$$C_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = 1, \quad D_{21} = [1 \quad 0]^T$$

不确定性界设为 $|r_i(t)| \leq 2, i = 1, 2$ 。应用本文方法对该输出端灵敏度问题进行求解, 这里有两个摄动参数, 因此其顶点数为 $2^s = 2^2 = 4$ 。4 个摄动顶点分别为 $(-2, -2), (-2, 2), (2, -2)$ 和 $(2, 2)$ 。当 r_1 和 r_2 分别取上述 4 组值时, 每个与 ΔA 有关的不等式都成为 4 个, 即 4 个摄动顶点处的不等式。利用软件 MATLAB 5.1 中 LMI Control Toolbox 求解式(9) 的 LMI, 应用函数命令

$$[\text{copt}, \text{xopt}] = \text{mincx}(\text{lmysys}, \text{c})$$

其中, copt 给出最小的目标函数值, xopt 给出最优决策向量值^[8]。得到的解为

$$\mathcal{Y}_{\min} = 1.000\ 000\ 002\ 224\ 98$$

$$Y =$$

$$\begin{bmatrix} 8.5185e+006 & 2.0098e+005 \\ 2.0098e+005 & 1.4119e+006 \\ -26649 & 4712.9 \\ -2.0093e+005 & -44445 \\ -26649 & -2.0093e+005 \\ 4712.9 & -44445 \\ 2.8798e+005 & -3.296e+005 \\ -3.296e+005 & 2.5142e+006 \end{bmatrix}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} -4.6917e-006 & 4.6703e+006 \\ -1 & 5.7919e+006 \\ 6.7514e-006 & -2.701e+006 \\ 1.1341e-005 & -1.4133e+006 \end{bmatrix}$$

\mathcal{Y}_{\min} 即为 4 个摄动顶点的最小目标函数值。将 \mathcal{Y}_{\min}, Y 和 W_o 代入式(8) 求解, 此时这个 LMI 无解, 而且 $\mathcal{Y} = 1.2$ 时均无解。降低对性能的要求, 取 $\mathcal{Y} = 1.21$, 应用函数命令

$$[\text{tmin}, \text{xfeas}] = \text{feas}(\text{lmysys})$$

求解式(8) 和(9), 其中 tmin 给出结束计算时的 t 值, xfeas 给出决策向量的值^[8]。得到对应的控制器为

$$K(s) = \frac{1}{(s + 1191.9)(s + 213.5)(s + 5.68)(s + 0.043)} \times [-4907.3(s + 0.0374)(s + 6.99 \pm 3.447i) - 46852(s - 14.01)(s + 2.688)(s + 0.0419)]$$

闭环系统灵敏度函数在对象 4 个摄动顶点处的奇异值波特图如图 1 所示。

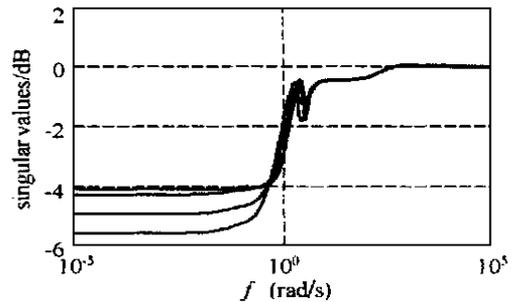


图 1 输出反馈时闭环系统灵敏度函数的奇异值波特图

(下转第 616 页)

线如图2(b)所示。使用不同的目标阻尼 B_i 所得的一组力矩响应曲线如图2(c)所示。可以看出,在采用相同 M_i 和 K_i 的情况下,随着 B_i 的增加,冲击力和力超调变大,但是冲击之后力的振荡幅度减小,即接触稳定性提高,证明了实时调整阻尼参数的必要性。

5.3 模糊自适应阻抗控制的仿真

采用与5.2节相同的仿真条件,初始目标阻尼 B_{i0} 选为 $1.5 \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{rad}/\text{s})$,采用模糊自适应阻抗控制算法进行仿真研究,得到的力矩响应曲线如图2(d)所示。与图2(c)相比,力矩的超调明显减小,同时接触稳定性也有所增强,从而较好地解决了采用恒定阻抗参数的阻抗控制所存在的问题。

6 结 语

目标阻抗参数恒定的基于位置的阻抗控制,过渡过程的稳定性和动态品质不能同时得到提高。针对这一缺点,本文提出一种基于滑模位置控制的模糊自适应阻抗控制策略。使用滑模位置控制内环,可以有效地增强系统的鲁棒性;使用模糊控制器在线调整目标阻尼参数,既可保证接触的稳定,又可使力

超调减小。以机器人灵巧手单关节为对象,建立了仿真对象及控制器的数学模型,给出了滑模位置控制器和模糊控制器的设计过程。仿真研究结果表明,该控制策略对于控制性能的提高有明显的作用,是一种有效而可行的控制方案。

参考文献:

- [1] Hogan N. Impedance control: An approach to manipulation[J]. *J Dyn Syst Meas Contr*, 1985, 107(1): 1-24.
- [2] Dragoljub Surdilovic. Synthesis of impedance control laws at higher control levels: Algorithms and experiments[A]. *Proc of IEEE Int Conf on Robotics and Automation[C]*. Leuven, 1998. 213-218.
- [3] Dragoljub Surdilovic. Robust robot compliant motion control using intelligent adaptive impedance approach [A]. *Proc of IEEE Int Conf on Robotics and Automation[C]*. Michigan, 1999. 2128-2133.
- [4] H Liu, J Butterfass, S Knoch *et al.* A new control strategy for DLR's multisensory articulated hand[J]. *IEEE Trans on Contr Syst*, 1999, 19(2): 47-54.
- [5] 高为炳. 变结构控制理论基础[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1990.

(上接第611页)

5 结 论

1) 输出反馈的鲁棒性能设计包括两方面内容,即输入(端)扰动的抑制和输出(端)灵敏度问题。本文主要讨论输出灵敏度问题。由于参数不确定性系统输出反馈的解(式(8))不是线性不等式,所以应求解式(9),即先求解一个输出注入问题。输出注入问题中的最优性能 γ 是灵敏度问题的性能极限,所以这种分步求解的做法,其物理概念比较清楚。

2) 本文为说明基本方法,在算例中未加进权函数。对于实际设计问题而言,应在对象中加上与性能要求有关的权函数。

参考文献:

- [1] Xie L, FU M, Carlos E De Soza. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback[J]. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1992, 37(8): 1253-1256.
- [2] Yammada Y, Hara S. Global optimization for H_∞ control with constant diagonal scaling[J]. *IEEE Trans on*

Autom Contr, 1998, 43(2): 191-202.

- [3] Jabbari F. Output feedback controller for systems with structured uncertainty[J]. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1997, 42(5): 715-719.
- [4] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307-1317.
- [5] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P *et al.* State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1989, 34(8): 831-847.
- [6] Zhou K, Khargonekar P P, Stoustrup J. Robust performance of system with structured uncertainties in state space[J]. *Automatica*, 1995, 31(2): 249-255.
- [7] Schmitendorf W E. Design methodology for robust stabilizing controllers[J]. *AIAA J Guid Contr Dyn*, 1987, 10(3): 250-254.
- [8] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J *et al.* LMI control toolbox[M]. Natick: The Math Works Inc, 1995.