

文章编号: 1001-0920(2001)05-0535-05

# 不确定多输入非线性系统自适应 模糊滑模控制器设计

王声远, 霍 伟

(北京航空航天大学 第七研究室, 北京 100083)

**摘要:** 针对一类不确定多输入非线性系统提出一种新的自适应模糊滑模控制器, 该控制器在存在模糊逻辑系统逼近误差的情况下使闭环系统跟踪误差小于预先给定常数, 消除滑模控制中的抖振, 缓解因系统维数增高所导致的模糊规则爆炸现象。最后用仿真算例验证了所提出方法的有效性。

**关键词:** 模糊逻辑系统; 自适应模糊控制; 滑模控制

中图分类号: TP 13

文献标识码: A

## Design Method of Adaptive Fuzzy Sliding-mode Controllers for a Class of Uncertain Multi-input Nonlinear Systems

WANG Sheng-yuan, HUO Wei

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** An adaptive fuzzy sliding-mode controller is presented with three advantages: The controller can drive the tracking errors of the closed loop system into pre-specified neighborhood of the origin in the presence of approximation errors of the fuzzy logic systems; the method eliminates the chattering encountered when the sliding-mode control is used alone; and the controller can relieve the blast of fuzzy rules ascribed to the increase of the system dimension. Simulation results show the effectiveness of this scheme.

**Key words:** fuzzy logic system; adaptive fuzzy control; sliding-mode control

### 1 引 言

近年来, 模糊控制理论的发展为研究不确定系统的控制问题带来了新思路。许多研究者将模糊逻辑系统(FLS)与滑模控制相结合提出一些各具特色的设计方法<sup>[1,2]</sup>。然而, 对于不确定多输入非线性系统, 其模糊控制器的研究还存在许多困难, 最突出的是: 如何协调多个控制输入之间的关系以保证闭环

系统的稳定性, 如何解决因系统维数增高所带来的模糊规则爆炸问题。

本文针对一类多输入非线性系统提出一种新的自适应模糊滑模控制器, 其主要设计思路如下: 对每个控制输入设计一个仅与部分状态变量相关的切换函数以及相应的自适应模糊滑模控制器。在给定的切换区外, 自适应模糊控制器与滑模控制器共同作用, 主要由滑模控制器将跟踪误差镇定到切换区内,

收稿日期: 2000-05-31; 修回日期: 2000-08-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(69774009); 教育部博士点基金项目(199900062)

作者简介: 王声远(1972—), 男, 湖北汉川人, 博士生, 从事非完整系统的智能控制研究; 霍伟(1951—), 男, 湖北武汉人, 教授, 博士生导师, 从事机器人动力学与控制、智能控制、大系统稳定性与分散控制等研究。

经有限时间后将自适应参数调整到合适的值,使得此后关闭滑模控制器时自适应模糊控制器能约束住跟踪误差,即使跟踪误差不再逸出切换区,在切换区的边界处也不再出现滑模控制律的切换;在切换区内连续的自适应控制律可将跟踪误差镇定到预先给定的界内,并消除滑模控制中的抖振。另外,由于每个模糊控制器的输入变量仅与部分相应的状态变量有关,因此本文方法能有效地缓解由于系统维数增高所产生的模糊规则爆炸现象。最后以仿真算例验证了本文方法的有效性。

## 2 预备知识

### 2.1 系统表述及控制任务

考虑如下不确定多输入非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = \bar{x}_{i2}, \dot{x}_{i2} = \bar{x}_{i3}, \dots, \dot{x}_{i, n_i-1} = \bar{x}_{i n_i} \\ \dot{x}_{i n_i} = f_i(\bar{X}) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(\bar{X}) u_j \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\bar{X} = [\bar{x}_{11}, \dots, \bar{x}_{1 n_1}; \dots; \bar{x}_{m1}, \dots, \bar{x}_{m n_m}]^T \triangleq [\bar{X}_1^T, \dots, \bar{X}_m^T]^T$  为状态变量,  $n_i = n, f_i(\bar{X})$  和  $b_{ij}(\bar{X})$  均为未知的连续函数。

本文的控制任务是: 给定有界的期望状态轨迹

$$\begin{aligned} X_d = [x_{d1}(t), \dots, x_{d1}^{(n_1-1)}(t); \dots; \\ x_{dm}(t), \dots, x_{dm}^{(n_m-1)}(t)] \triangleq \\ [X_{d1}^T, \dots, X_{dm}^T]^T \end{aligned}$$

设计自适应模糊滑模控制器, 将跟踪误差

$$X = \bar{X} - X_d \triangleq [X_1^T, \dots, X_m^T]^T$$

镇定到预先给定的范围内。

### 2.2 模糊控制器结构

滑模控制选取如下  $m$  个切换函数

$$S_i = (d/dt + p_i)^{n_i-1} x_{i1} \triangleq P_i^T X_i$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

其中, 常数  $p_i > 0, P_i = [p_i^{n_i-1}, (n_i-1)p_i^{n_i-2}, \dots, 1]^T$ 。

引理 1 如果  $|S_i(t)| \leq \epsilon_i (\forall t \geq 0)$ , 且

$$X_i(0) \leq d_i, \text{ 则存在一组正数 } q_{ij} (i = 1, 2, \dots, m;$$

$j = 1, 2, \dots, n_i)$  使得下式成立

$$|x_{ij}(t)| \leq 2^{j-1} \epsilon_i / p_i^{n_i-j} + d_i q_{ij}, \quad \forall t \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

参考文献[3]的结论易证引理 1 成立。

选择以上切换函数具有将  $S_i$  的界用引理 1 转化

为  $X_i$  的界的优点。并且当跟踪误差初始值范围已知

时, 可用引理 1 确定模糊输入变量的定义域。

共使用  $m$  个自适应模糊控制器, 第  $i (i = 1, 2, \dots, m)$  个自适应模糊控制器的输入变量是跟踪误差  $X$  的分量  $X_i$ , 其定义域为

$$A_{di} = \{X_i \in R^{n_i} \mid |x_{ij}| \leq \omega_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n_i\}$$

其中  $\omega_j$  可由引理 1 确定。对任一  $x_{ij}$ , 将其定义域划分为  $2m_{ij} + 1$  个模糊区间  $A_{ij, \dot{i}_j} (\dot{i}_j = -m_{ij}, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_{ij})$ , 其中  $m_{ij} = [\omega_j p_{ij} / \Phi] + 1, [\omega_j p_{ij} / \Phi]$  表示取  $\omega_j p_{ij} / \Phi$  的整数部分。

各模糊区间的中心定义为

$$c_{ij, \dot{i}_j} = \dot{i}_j \Phi / p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

$$\dot{i}_j = -m_{ij}, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_{ij}$$

隶属函数均取为等腰三角形, 其表达式为

$$\mu_{A_{ij, \dot{i}_j}}(x_{ij}) = \begin{cases} \frac{x_{ij} - c_{ij, \dot{i}_j-1}}{\Delta_{ij, \dot{i}_j-1}}, & c_{ij, \dot{i}_j-1} \leq x_{ij} \leq c_{ij, \dot{i}_j} \\ \frac{c_{ij, \dot{i}_j+1} - x_{ij}}{\Delta_{ij, \dot{i}_j}}, & c_{ij, \dot{i}_j} \leq x_{ij} \leq c_{ij, \dot{i}_j+1} \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\Delta_{ij, \dot{i}_j} = c_{ij, \dot{i}_j+1} - c_{ij, \dot{i}_j}$$

由式(2)知, 两个相邻模糊区间的隶属函数满足

$$\mu_{A_{ij, \dot{i}_j+1}} = 1 - \mu_{A_{ij, \dot{i}_j}} \quad (3)$$

根据模糊区间的划分可知, 第  $i$  个 FLS 一共有

$$N_i = \sum_{j=1}^{n_i} (2m_{ij} + 1)$$

条模糊规则, 每一条模糊规则的输出模糊集合的中心定义为

$$Y_i^{(i_1, \dots, i_{n_i})} = k_{F_i}(i_1 + \dots + i_{n_i}) + \theta_i^{(i_1, \dots, i_{n_i})} \triangleq Y_{i1}^{(i_1, \dots, i_{n_i})} + \theta_i^{(i_2, \dots, i_{n_i})}$$

其中  $k_{F_i} > 0, \theta_i^{(i_1, \dots, i_{n_i})}$  表示自适应可调参数。定义

$$Y_{ii} = [Y_{i1}^{(-m_{i1}, \dots, -m_{in_i})}, Y_{i1}^{(-m_{i1}+1, \dots, -m_{in_i})}, \dots, Y_{i1}^{(m_{i1}, \dots, m_{in_i})}]^T$$

$$\Theta_i = [\theta_i^{(-m_{i1}, \dots, -m_{in_i})}, \theta_i^{(-m_{i1}+1, \dots, -m_{in_i})}, \dots, \theta_i^{(m_{i1}, \dots, m_{in_i})}]^T$$

$$\xi_i^{(i_1, \dots, i_{n_i})}(X_i) = \frac{\prod_{j=1}^{n_i} \mu_{A_{ij, \dot{i}_j}}(x_{ij})}{\sum_{i_1=-m_{i1}}^{m_{i1}} \dots \sum_{i_{n_i}=-m_{in_i}}^{m_{in_i}} \mu_{A_{ij, \dot{i}_j}}(x_{ij})}$$

$$\Psi_i(X_i) = \sum_{i_1=-m_{i1}}^{m_{i1}} \dots \sum_{i_{n_i}=-m_{in_i}}^{m_{in_i}} \mu_{A_{ij, \dot{i}_j}}(x_{ij}) Y_i^{(i_1, \dots, i_{n_i})}$$

$$[\xi_i^{(-m_{i1}, \dots, -m_{in_i})}(X_i), \xi_i^{(-m_{i1}+1, \dots, -m_{in_i})}(X_i), \dots, \xi_i^{(m_{i1}, \dots, m_{in_i})}(X_i)]^T$$

采用单值模糊产生器, 乘积推理和中心模糊平均消除器, 则第  $i$  个模糊控制器的输出为

$$u_{Fi} = Y_i^T \Psi_i(X_i) - \Theta^T \Psi_i(X_i) \triangleq u_{Fi,1} + u_{Fi,2} \quad (4)$$

根据模糊区间的划分以及式(2)和(3)易知如下命题成立。

命题 1<sup>[1]</sup> 形如式(4)的模糊控制器的输出  $u_{Fi,1}$  具有如下性质:

$$\text{当 } |S_i| \in \Phi \text{ 时, } u_{Fi,1} = -k_{Fi} \frac{S_i}{\Phi}$$

命题 2 对第  $i$  个模糊控制器, 记任一时刻所激发的  $2^{n_i}$  条模糊规则的序号集为  $N_i$ , 则有

$$\max \{ \xi_i^{(i_1, \dots, i_{n_i})}(X_i) \mid (i_1, \dots, i_{n_i}) \in N_i \} = (1/2)^{n_i} \Psi_i(X) = 2^{n_i/2}$$

注 1 下文所用的范数  $\cdot$  均指 2-范数。

### 3 主要结论

记切换区  $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{R}_i \triangleq \{X_i \mid |S_i| \in \Phi\}$ ,

$F = [f_1, f_2, \dots, f_m]^T, B = [b_{ij}] \in R^{m \times m}$ . 对  $F$  和  $B$  有估计值  $\hat{F}$  和  $\hat{B}, B = (I + \Delta) \hat{B}, \Delta^T = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m], \delta_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in_i}]^T$ . 设期望值  $|x_{di}^{(j)}(t)| \leq v_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n_i)$ , 并记

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{i0} \\ \vdots \\ v_{in_i} \end{bmatrix}$$

则  $X_d = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \triangleq \bar{v}$

有了上述准备工作后, 可用如下定理给出本文的主要结果:

定理 1 对于不确定多输入非线性系统(1), 如果:

1) 系统方程满足:

① 对  $F$  和  $B$  及其估计值  $\hat{F}$  和  $\hat{B}$ , 存在已知函数  $M_i(\bar{X}), D_{ij}(\bar{X}) (i, j = 1, 2, \dots, m)$ , 满足  $|f_i - \hat{f}_i| \leq M_i(\bar{X}), B = (I + \Delta) \hat{B}, \Delta$  的任一分量  $|\delta_{ij}| \leq D_{ij}(\bar{X}), I + [D_{ij}(\bar{X})]$  为对角占优阵, 并且  $B$  可逆,  $\forall \bar{X} \in R^n$ .

② 当  $|S_i| \in \Phi$  时,  $|\delta_{ij}| \leq d_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, m)$ , 其中  $d_{ij}$  是已知正数。

③ 系统(1)状态变量的初始值位于  $X_i(0)$

$d_{ii} (i = 1, 2, \dots, m)$  内, 其中  $d_{ii}$  是已知正数。

2) 控制律  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  取为

$$U = \begin{cases} \hat{B}^{-1}(U + U_F - \hat{F}), & X \notin \mathcal{R} \\ \hat{B}^{-1}(U_F - \hat{F}), & X \in \mathcal{R} \end{cases}$$

其中

$$\bar{U} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]^T$$

$$\bar{u}_i = -\frac{k_{Di}}{1 - D_{ii}} S_i -$$

$$K_i(X) \text{sgn}(S_i), \quad k_{Di} > 0$$

$$K_i(X) = \frac{1}{1 - D_{ii}} \left[ \rho_i + \sum_{j=1, j \neq i}^m D_{ij} U_j \right]$$

$$\rho_i = |u_{Fi}| + \sum_{j=1}^m D_{ij} |u_{Fj}| + M_i +$$

$$|P_{Si}^T X_i| + v_{in_i} + \sum_{j=1}^m D_{ij} |\hat{f}_j| +$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^m D_{ij} \frac{k_{Dj} |S_j|}{1 - D_{jj}}$$

$$U_m = \max_{i=1, 2, \dots, m} \left\{ \frac{\rho_i}{1 - D_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^m D_{ij}} \right\}$$

$P_{Si}^T = [0, p_i^{n_i-1}, (n_i - 1)p_i^{n_i-2}, \dots, (n_i - 1)p_i]$ ,  $U_F = [u_{F1}, \dots, u_{Fm}]^T$ ,  $u_{Fi}$  为式(4)定义的模糊控制器。

3) 取第  $i$  个模糊控制器参数  $\Theta (i = 1, 2, \dots, m)$  的初值  $\Theta(0) = 0$ , 其自适应律为

$$\dot{\Theta} = \begin{cases} -\frac{\Psi_i}{\Psi_i} 2g_i, & \Theta = M_{fi} \text{ 且 } \frac{\Theta^T \Psi_i}{\Psi_i} 2g_i = 0 \\ P \left\{ -\frac{\Psi_i}{\Psi_i} 2g_i \right\}, & \Theta = M_{fi} \text{ 且 } \frac{\Theta^T \Psi_i g_i}{\Psi_i} < 0 \end{cases}$$

其中

$$P \left\{ -\frac{\Psi_i}{\Psi_i} 2g_i \right\} =$$

$$-\frac{\Psi_i}{\Psi_i} 2g_i + (\Theta +$$

$$\frac{\Psi_i}{\Psi_i} 2k_i \text{sgn}(S_i), \frac{\Theta^T \Psi_i g_i}{\Psi_i}$$

$$g_i = [\eta_i + 2^{n_i/2} \Theta^T h_i] \text{sgn}(\Theta^T \Psi_i + k_i \text{sgn}(S_i)) + a_i (\Theta^T \Psi_i + k_i \text{sgn}(S_i)), \quad \eta_i = 0$$

$$h_i = \frac{1}{\Delta_i} [x_{ij}]_{j=2}^{n_i} + M_i(\bar{X}) + v_{in_i} +$$

$$\sum_{j=1}^m D_{ij} |\hat{f}_j| + \sum_{j=1, j \neq i}^m D_{ij} |\bar{u}_j + u_{Fj}| +$$

$$\Delta_i = \min\{\Delta_{j,i} | j = 1, 2, \dots, n_i\}$$

$$\bar{k}_i = \frac{1}{1 - d_{ii}} \left[ \bar{p}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^m d_{ij} \bar{U}_m \right]$$

$$\bar{p}_i > \max\{\bar{p}_{i1}(X) | |x_{ij}| \leq 2^{j-1} \Phi / p_i^{n_i-j} + q_{ij} H_{i, \phi_i}, i = 1, 2, \dots, m,$$

$$j = 1, 2, \dots, n_i, X_d \in \bar{v}\}$$

$$\rho_{i1}(X) = M_i + |P_{Si}^T X_i| + v_{in_i} +$$

$$\sum_{j=1}^m d_{ij} |\hat{f}_j| + \sum_{j=1, j \neq i}^m d_{ij} k_{Fj}$$

$$\bar{U}_m = \max_{i=1, 2, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{p}_i}{1 - d_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^m d_{ij}} \right\}$$

$$H_{i, \phi_i} = \sum_{j=1}^{n_i} \omega_j^2$$

$$\omega_j = (\bar{d}_{i1} + v_i) (2^{j-1} P_i / p_i^{n_i-j} + q_j)$$

$$a_i = \frac{\bar{v}}{2(1 + d_{ii}) \bar{k}_i} \Phi$$

$$M_{fi} = \frac{1 + 2^{2(n_i-1)} \bar{k}_i^2 + 2^{n_i-1} \bar{k}_i}{1}$$

则闭环系统具有如下性能:

① 自适应参数与控制量均有界

$$\Theta \leq M_{fi} \begin{cases} |\bar{u}_i| \leq \frac{1}{1 - D_{ii}(X)} [k_{Di} |P_i^T X_i| + K_i(X)] < \infty, X \in \mathcal{R} \\ |u_{Fi}| \leq k_{Fi} + \bar{k}_i, X \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (5)$$

② 跟踪误差指数收敛于如下的界中

$$|x_{ij}| \leq \frac{2^{j-1} \bar{v} (1 + d_{ii}) \bar{k}_i}{a p_i^{n_i-j}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (6)$$

证明 证明可分3步进行:

1) 当X在切换区 \$\mathcal{R}\$ 外时,若取 \$V\_i = \frac{1}{2} S\_i^2\$, 则易

证 \$\dot{V}\_i = -2k\_{Di} V\_i\$, 即跟踪误差轨迹以指数速率在有限时间内进入切换区。由 \$\dot{V}\_i = -2k\_{Di} V\_i\$ 可知, 在跟踪误差轨迹向 \$|S\_i| = \Phi\$ 的趋近过程中, \$|S\_i| \leq |S\_i(0)|\$

\$|P\_i| |\bar{x}\_i(0)| = (\bar{d}\_{i1} + v\_i) P\_i\$。因此由引理1得

$$|x_{ij}| \leq 2^{j-1} (\bar{d}_{i1} + v_i) P_i / p_i^{n_i-j} + (\bar{d}_{i1} + v_i) q_j = \omega_j$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

故当 \$|S\_i| = \Phi\$ 时跟踪误差 \$X\_{i, \phi\_i} = [x\_{i1, \phi\_i}, \dots, x\_{in\_i, \phi\_i}]^T\$ 满足

$$X_{i, \phi_i} \leq \sum_{j=1}^{n_i} \omega_j^2 \triangleq H_{i, \phi}$$

于是,由引理1可知此时

$$|x_{ij}| \leq 2^{j-1} \Phi / p_i^{n_i-j} + q_{ij} H_{i, \phi_i}$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

在有限闭区域 \$\{(X, X\_d) | |x\_{ij}| \leq 2^{j-1} \Phi / p\_i^{n\_i-j} + q\_{ij} H\_{i, \phi\_i}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\_i, X\_d \in \bar{v}\}\$ 内 \$\bar{k}\_i\$ 是可求出的。

2) 考虑自适应模糊控制器的情况,取 \$V\_{fi} = \Theta^T \Theta / 2\$, 易证 \$\dot{\Theta} \leq -M\_{fi} \Theta\$。

当 \$0 < S\_i\$ 时,取 \$V\_{i2} = \frac{1}{2} (\Theta^T \Psi\_i + \bar{k}\_i)^2\$, 可证明 \$\dot{V}\_{i2} = -2a\_i V\_{i2} - \eta\_i / 2V\_{i2} - \eta\_i / 2V\_{i2}\$。故当取自适应参数 \$\Theta\$ 的初始值 \$\Theta(0) = 0\$ 时, \$\Theta^T \Psi\_i + \bar{k}\_i\$ 在有限时间 \$t\_{ri} = \bar{k}\_i / \eta\_i\$ 内到达0。

当 \$S\_i < 0\$ 时,可平行地得到 \$\Theta^T \Psi\_i - \bar{k}\_i\$ 也在有限时间内到达0。因此, \$|\Theta^T \Psi\_i| \leq \bar{k}\_i\$。

3) 研究X进入切换区 \$\mathcal{R}\$ 的情况,此时 \$u\_{Fi} = -k\_{Fi} S\_i / \Phi + \Theta^T \Psi\_i(X\_i)\$。

当X进入第i个切换区 \$\mathcal{R}\$ 时 \$S\_i > 0\$, 取 \$V\_{i1} = \frac{1}{2} S\_i^2\$, 则它沿系统(1)的导数 \$\dot{V}\_{i1} = (1 - d\_{ii}) k\_{Fi} S\_i^2 / \Phi\$。故当 \$t = \max\{t\_{r1}, \dots, t\_{rm}\}\$ 后,进入 \$\mathcal{R}\$ 的 \$S\_i\$ 不会再逸出 \$\mathcal{R}\$, 滑模控制器也不用再启动。当 \$S\_i < 0\$ 时,可平行地得到同样的结论。

若 \$S\_i > 0\$, 则 \$\Theta^T \Psi\_i\$ 在有限时间内到达 \$-\bar{k}\_i\$, 从而经一段时间后,总能保证 \$S\_i < 0\$, 因此有 \$S\_i = 0\$。又由 \$\bar{k}\_i\$ 的选取可知, 在 \$S\_i = 0\$ 处 \$\dot{S}\_i = 0\$, 故 \$S\_i\$ 将穿过 \$S\_i = 0\$ 进入 \$S\_i < 0\$ 内。相似于 \$S\_i > 0\$ 的分析可知, 经一段时间后, \$S\_i\$ 将再次穿越 \$S\_i = 0\$ 进入 \$S\_i > 0\$ 内, 如此往复不止。假设穿越 \$S\_i = 0\$ 的时刻分别为 \$t\_{i1}, t\_{i2}, \dots\$。相应地, \$\Theta^T \Psi\_i\$ 在 \$-\bar{k}\_i\$ 与 \$\bar{k}\_i\$ 之间连续变化, 即当 \$t = t\_{i1}\$ 时, \$|\Theta^T \Psi\_i| = \bar{k}\_i\$。因此, \$V\_{i2}(t) = 2\bar{k}\_i^2\$。

考虑在任意两个穿越时刻 \$t\_{ik}, t\_{i, k+1} (k = 1, 2, \dots)\$ 之间的情况。在此时间区间内, 如果 \$S\_i > 0\$, 由于 \$\dot{V}\_{i2} = -2a\_i V\_{i2}\$, 故有

$$\Theta^T \Psi_i + \bar{k}_i = 2\bar{k}_i e^{-a_i(t-t_{ik})}$$

于是有

$$\dot{V}_{i1} = -2(1 - d_{ii}) k_{Fi} / \Phi V_{i1} + \frac{2\bar{k}_i e^{-a_i(t-t_{ik})}}{2(1 + d_{ii}) S_i k_{Fi} e^{-a_i(t-t_{ik})}}$$

即

$$\dot{S}_i - (1 - d_{ii})k_{Fi}/\Phi S_i + \frac{\bar{k}_{ii}}{2(1 + d_{ii})\bar{k}_i/a_i} e^{-a_i(t-t_k)}$$

对其两边积分, 根据 Bellman-Gronwall 引理<sup>[4]</sup> 得

$$|S_i| \leq \frac{\bar{k}_{ii}}{2(1 + d_{ii})\bar{k}_i/a_i} \Phi \quad (7)$$

若  $S_i < 0$ , 也可平行地得到相同的结论。因而, 闭环系统的轨迹满足式(7)。因为  $|S_i| \leq \Phi$ , 所以  $a_i$  应满足

$$\frac{\bar{k}_{ii}}{2(1 + d_{ii})\bar{k}_i/a_i} \Phi \leq a_i \leq \frac{\bar{k}_{ii}}{2(1 + d_{ii})\bar{k}_i/a_i} \Phi$$

由引理 1 中  $S_{ij}$  的界与  $x_{ij}$  的界的关系可知, 跟踪误差将指数收敛于以下的界中

$$|x_{ij}| \leq \frac{2^{j-1} \bar{k}_{ii}}{a_i p_i^{n_i-j}} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (8)$$

最后, 根据控制律的表达式和  $X$  的有界性易知式(5) 成立。(证毕)

### 4 仿真算例

考虑文献[5] 中的强耦合 MIMO 非线性系统(本文已将其化为式(1) 的形式)

$$\dot{x}_{11} = f_1(X) + b_{11}(X)u_1 + b_{22}(X)u_2$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22}$$

$$\dot{x}_{22} = f_2(X) + b_{21}(X)u_1 + b_{22}(X)u_2$$

的镇定问题, 此时期望轨迹为  $X_d = [0, 0, 0]^T$ , 故  $X = \bar{X} - X_d = \bar{X}$ 。假设  $\hat{f}_1(X) = -1.5x_{11} - 0.5x_{21}^2$ ,  $\hat{f}_2(X) = -1.2x_{22} - 1.8x_{21}$ ,  $\hat{b}_{11}(X) = 1$ ,  $\hat{b}_{22}(X) = 1.2$ ,  $\hat{b}_{12}(X) = 1.8$ ,  $\hat{b}_{21}(X) = 2$ ,  $d_{11} = 0.17$ ,  $d_{12} = 0.09$ ,  $d_{21} = 0.17$ ,  $d_{22} = 0.2$ ,  $\bar{d}_{i1} = 0.4(i = 1, 2)$ 。取  $\Phi = 0.3$ ,  $p_2 = 1$ , 则  $S_1 = x_{11}$ ,  $S_2 = x_{21} + x_{22}$ 。当闭环系统轨迹进入切换区后, 可算得  $|x_{11}| \leq 0.45$ ,  $|x_{12}| \leq 0.75$ ; 进一步算得  $\bar{k}_1 = 1.8$ ,  $\bar{k}_2 = 2.4$ 。若要求  $|x_{ij}| \leq 0.02(i, j = 1, 2)$ , 则由式(8) 分别算得  $a_1 = 170$ ,  $a_2 = 220$ 。取  $K_{D1} = K_{D2} = 5$ ,  $\eta = 20$ ,  $k_{F1} = 1$ ,  $k_{F2} = 1$ 。

设系统未知项真值分别为  $f_1(X) = -2x_{11} - x_{21}^2$ ,  $b_{11}(X) = 1$ ,  $b_{12}(X) = 2$ ,  $f_2(X) = -1.45x_{22} - 2x_{21}$ ,  $b_{21}(X) = 1.6$ ,  $b_{22}(X) = 1$ 。仿真中取初始状态

$X(0) = [0.3, -0.3, 0.2]^T$ ,  $a_1 = 170$ ,  $a_2 = 220$ , 各模糊输入变量都在  $[-0.9, 0.9]$  上均匀划分为 7 个模糊区间。闭环系统状态变量和控制量的变化曲线分别如图 1 和图 2 所示。

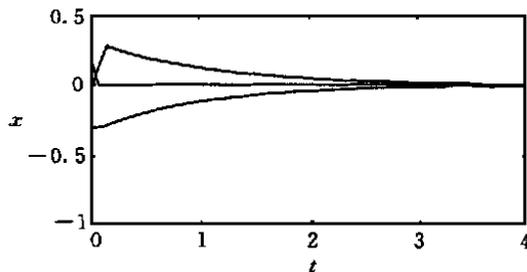


图 1 闭环系统状态变量变化曲线

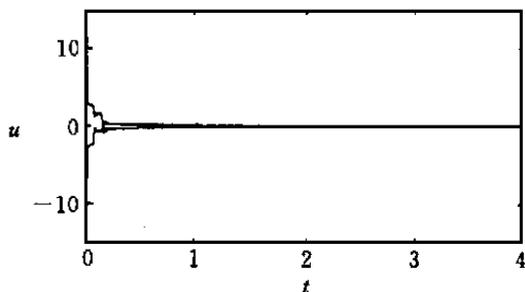


图 2 闭环系统控制量变化曲线

从图中可以看出, 闭环系统性能满足控制要求, 模糊控制量仅在开始阶段变化较为激烈, 这是由于在自适应参数调整到合适值以前存在滑模控制律切换现象。

### 参考文献:

[1] C S Chen, W L Chen. Analysis and design of a stable fuzzy control system[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 96(1): 21-25.  
 [2] R Ordonez, K M Passino. Stable multi-input multi-output[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1999, 7(3): 345-353.  
 [3] J J E Slotine, S S Sastry. Tracking control using sliding surfaces[J]. Int J Control, 1983, 38(2): 465-492.  
 [4] 斯洛廷, 李卫平. 应用非线性控制[M]. 蔡自兴, 罗公亮, 桂卫华, 等译. 北京: 国防工业出版社, 1992.  
 [5] 戴先中. 非线性 MIMO 系统线性化解耦的一种新方法(1)[J]. 控制与决策, 1999, 14(5): 403-406.