

文章编号: 1001-0920(2001)05-0540-05

一类不确定非线性系统的模糊动态输出反馈控制

佟绍成¹, 周 军²

(1. 辽宁工学院 数理科学系, 辽宁 锦州 121001; 2. 辽宁工学院 计算机科学与工程系, 辽宁 锦州 121001)

摘 要: 利用模糊 T-S 模型对一类不确定非线性系统进行模糊建模, 在此基础上研究基于观测器的模糊动态输出反馈控制, 给出了模糊闭环系统二次稳定的充分条件及其反馈控制增益和观测器增益的求法, 以及输出反馈控制器的设计方法。仿真结果证明所提出的控制方法是有效的。

关键词: 非线性不确定系统; 模糊系统; 动态输出反馈; 二次稳定性

中图分类号: TP 202 **文献标识码:** A

Fuzzy Dynamic Output Feedback Control for a Class of Uncertain Nonlinear Systems

TONG Shao-cheng¹, ZHOU Jun²

(1. Department of Mathematics and Physics, Liaoning Institute of Technology, Jinzhou 121001, China; 2. Department of Computer Science and Engineering, Liaoning Institute of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract: A class of uncertain nonlinear systems are modeled by fuzzy T-S model. On the basis of the fuzzy modeling, a fuzzy state feedback controller and robust observer are designed. Based on linear matrix inequality, fuzzy state feedback gain matrix and fuzzy observer gain matrix algorithms are given. The fuzzy closed-loop system is proved to be stable.

Key words: uncertain nonlinear systems; fuzzy system; dynamic output feedback; quadratic stability

1 引 言

利用模糊 T-S 模型对不确定非线性系统的动态特征进行描述和建模, 进而实现系统控制的设计和稳定性分析, 已成为当前模糊控制领域中的一个研究热点, 并取得了一些成果^[1~5]。针对模糊 T-S 模型, Tanaka 等^[1,2]提出了模糊系统的状态反馈及其闭环系统稳定的充分条件以及鲁棒稳定性。鉴于文献[1, 2]要求系统的状态是可测的, Ma 等^[3]给出了基于观测器的反馈控制及其闭环系统稳定的充分条

件。文献[1~3]的方法要求必须找到一个公共的正定矩阵 P , 才能镇定系统, 而且缺乏有效的算法。为此 Cao 等^[4]提出用一组正定矩阵 (P_1, P_2, \dots, P_m) 来代替公共的正定矩阵 P , 其反馈控制是基于线性不确定系统理论而设计的。文献[5]借助于现代控制理论的极点配置法对上述缺陷进行改进, 但是文献[4, 5]要求系统的状态必须是可观测的, 否则状态反馈控制难以奏效。

本文在文献[4, 5]的基础上, 利用模糊 T-S 模型对一类不确定非线性系统进行局部建模, 得到一

收稿日期: 2000-05-22; 修回日期: 2000-08-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(69874020); 辽宁省教委高校基金项目(990821099)

作者简介: 佟绍成(1960—), 男(满族), 辽宁凌海人, 教授, 博士, 从事非线性控制和模糊控制研究; 周军(1966—), 女, 内蒙古通辽人, 副教授, 硕士, 从事智能控制研究。

组模糊系统; 给出了基于观测器的动态输出反馈控制和模糊闭环系统二次稳定的充分条件, 利用 LM I 方法设计出状态反馈增益矩阵和观测器增益矩阵, 从而解决了在系统状态不可测条件下, 不确定非线性系统模糊控制算法及其稳定性问题; 最后将所提出的方法应用于倒立摆控制, 仿真结果证明了所提出控制方法的有效性。

2 模糊系统建模及其状态反馈控制

考虑由模糊 T-S 模型所描述的不确定非线性系统

$$R^l: \text{if } z_1(t) \text{ is } F_1^l \text{ and } \dots \text{ and } z_n(t) \text{ is } F_n^l \\ \text{then} \begin{cases} \dot{X}(t) = A_l X(t) + B_l u(t) \\ Y(t) = C_l X(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, $R^l (l = 1, 2, \dots, m)$ 表示第 l 条模糊推理规则, $Y(t)$ 和 $u(t)$ 分别为系统的输出和输入变量, $X(t)$ 为系统变量, 称式(2.1)为第 l 个局部模糊线性系统。

应用单点模糊化、乘积推理和中心加权反模糊化模糊推理方法^[1], 可得全局模糊系统模型

$$\dot{X}(t) = \sum_{l=1}^m \mu_l(t) [A_l X(t) + B_l u(t)] \quad (2.2)$$

$$Y(t) = \sum_{l=1}^m \mu_l C_l X(t) \quad (2.3)$$

其中

$$w_l(t) = \prod_{j=1}^n F_j^l(z_j(t))$$

$$w_l(t) \geq 0, \quad w_l(t) \leq 0$$

$$\mu_l(t) = \frac{w_l(t)}{\sum_{i=1}^m w_i(t)}, \quad \sum_{l=1}^m \mu_l(t) = 1$$

将整个系统的状态空间分成 m 个子空间 $S_l = \{X \mid \mu_l(X) > 0, i, l = 1, 2, \dots, m, i \neq l\}$, 定义 S_l 上的特征函数为

$$\eta = \begin{cases} 1, & X \in S_l \\ 0, & X \notin S_l \end{cases}, \quad \sum_{l=1}^m \eta = 1$$

则在每个子空间, 模糊系统模型可记为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = [A_l + \Delta A_l(\mu)X(t)] + [B_l + \Delta B_l(\mu)]u(t) \\ Y(t) = C_l X(t) + \Delta C_l X(t), \quad X(t) \in S_l \end{cases} \quad (2.4)$$

其中

$$\Delta A(\mu) = \sum_{i=1, i \neq l}^m \mu_i(t) A_i$$

$$\Delta B_l(\mu) = \sum_{i=1, i \neq l}^m \mu_i(t) B_i$$

$$\Delta C_l(\mu) = \sum_{i=1, i \neq l}^m \mu_i(t) C_i$$

子空间 S_l 上的模糊系统(2.4)称为第 l 个模糊子系统。

定义分段光滑的李亚普诺夫函数

$$V = X^T P X = \sum_{l=1}^m \eta_l V_l = \sum_{l=1}^m \eta_l X^T P_l X \quad (2.5)$$

其中 P_1, P_2, \dots, P_m 为正定矩阵, $P = \eta_1 P_1 + \dots + \eta_m P_m$ 。李亚普诺夫函数(2.5)沿闭环系统(2.2)的导数定义为

$$dV/dt = L(X, t) \quad (2.6)$$

定义 1 模糊系统(2.2)称为二次可稳定的, 如果存在分段连续的反馈控制 $u(t) = K(\mu)X(t)$, 一组正定的矩阵 (P_1, \dots, P_m) 和常数 $\alpha > 0$, 使得

$$L(X, t) \leq -\alpha X^2 \quad (2.7)$$

文献[4]给出了在状态是可测的条件下, $\Delta A(\mu)$ 和 $\Delta B(\mu)$ 一致达到上界时, 模糊系统(2.2)可二次稳定的充分条件如下:

定理 1^[4] 模糊系统(2.2)二次可稳定的充分必要条件是存在反馈控制

$$u(t) = \sum_{l=1}^m \eta_l K_l X(t)$$

使得如下子系统

$$\dot{X}(t) = (A_l + E_{11})X(t) + (B_l + E_{12})K_l X(t)$$

$$X(t) \in S_l, \quad l = 1, 2, \dots, m$$

是二次稳定的。

定理 1 的意义在于可将判别模糊系统(2.4)稳定性问题转化为判别 m 个子系统的稳定性问题, 特别是在稳定性分析中, 不必寻找公共的正定矩阵 P , 从而改进了文献[2, 3]的条件。

3 模糊动态输出反馈控制

一般说, 控制系统的状态不都是可直接观测的。如果模糊系统(2.2)的状态不可观测, 则定理 1 的结论不成立, 于是设计观测器为

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = A_l \hat{X}(t) + B_l u(t) + L_l [Y(t) - \hat{Y}(t)] \\ \hat{Y}(t) = C_l \hat{X}(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

设计输出动态反馈控制为

$$u(t) = \sum_{l=1}^m \eta_l u_l(t), \quad u_l(t) = K_l \hat{X}(t) \quad (3.2)$$

定义观测器的误差 $e(t) = X(t) - \hat{X}(t)$, 则由式(4)和(8)得状态和误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) = & [A_l - B_l K_l]X(t) + (\Delta A_l - \Delta B_l K_l) \times \\ & X(t) + B_l K_l e(t) + \Delta B_l K_l X(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & [A_l - L_l C_l]e(t) + (\Delta A_l - L_l \Delta C_l - \\ & \Delta B_l K_l)X(t) + \Delta B_l K_l e(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

定义分段光滑的李亚普诺夫函数

$$\begin{aligned} V = & X^T P_c X + e^T P_0 e = \\ & \sum_{l=1}^m \eta_l X^T P_{lc} X + \sum_{l=1}^m \eta_l e^T P_{l0} e \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中, $P_c = \eta_1 P_{c1} + \dots + \eta_m P_{cm}$, $P_0 = \eta_1 P_{01} + \dots + \eta_m P_{0m}$ 。李亚普诺夫函数(3.5)沿闭环系统(3.3)和(3.4)的导数定义为

$$dV/dt = L(X(t), e(t), t) \quad (3.6)$$

定义2 模糊闭环系统(3.3)和(3.4)称为二次可稳定的, 如果存在分段连续的输出反馈控制(3.2), 两组正定矩阵 (P_{1c}, \dots, P_{mc}) , (P_{10}, \dots, P_{m0}) 和常数 $\alpha > 0$, 使得

$$L(X, e(t), t) \leq -\alpha [X^2 + e^2]$$

假设1 设 $[\Delta A_l(\mu), \Delta B_l(\mu)] = D_l F_l(t) [E_{1l}, E_{2l}]$, $\Delta C_l(\mu) = H_l F_l(t) E_{3l}$ 。其中, $D_l, E_{1l}, E_{2l}, E_{3l}$ 和 H_l 为适当维数的已知常数矩阵, $F_l(t)$ 为满足不等式 $F_l^T(t) F_l(t) \leq I$ 约束的未知函数矩阵。

对于闭环系统(3.3)和(3.4)的二次稳定性问题, 有如下定理:

定理2 设模糊系统(2.2)满足假设1, 如果存在两组正定的矩阵 (P_{1c}, \dots, P_{mc}) 和 (P_{10}, \dots, P_{m0}) 使得

$$\begin{aligned} S_{1l} = & (A_l - B_l K_l)^T P_{lc} + P_{lc} (A_l - B_l K_l) + \\ & P_{lc} (2D_l D_l^T + B_l B_l^T) P_{lc} + 2(E_{1l} - \\ & E_{2l} K_l)^T (E_{1l} - E_{2l} K_l) + E_{3l} E_{3l}^T < 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} S_{2l} = & (A_l - L_l C_l)^T P_{l0} + P_{l0} (A_l - L_l C_l) + \\ & 2P_{l0} D_l D_l^T P_{l0} + 2K_l^T E_{2l}^T E_{2l} K_l + \\ & P_{l0} L_l H_l H_l^T L_l^T P_{l0} < 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

证明 取李亚普诺夫函数

$$\begin{aligned} V(t) = & V_1(t) + V_2(t) = \\ & \sum_{l=1}^m \eta_l X^T(t) P_{lc} X(t) + \sum_{l=1}^m \eta_l e^T(t) P_{l0} e(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$V_1(t)$ 沿式(3.3)对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & \sum_{l=1}^m \eta_l X^T(t) [(A_l - B_l K_l)^T P_{lc} + \\ & P_{lc} (A_l - B_l K_l)] X(t) + \\ & \sum_{l=1}^m \eta_l 2X^T(t) P_{lc} B_l K_l e(t) + \\ & \sum_{l=1}^m \eta_l 2X^T(t) P_{lc} \Delta B_l K_l X(t) + \\ & \sum_{l=1}^m \eta_l 2X^T(t) P_{lc} (\Delta A_l - \Delta B_l K_l) X(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

利用不等式 $2X^T Y^T - \epsilon X^T Q X + \frac{1}{\epsilon} Y^T Q^{-1} Y$, $Q > 0, \epsilon > 0$, 则得

$$\begin{aligned} & 2X^T(t) P_{lc} B_l K_l e(t) \\ & X^T(t) P_{lc} B_l B_l^T P_{lc} X(t) + e^T(t) K_l^T K_l e(t) \\ & 2X^T(t) P_{lc} \Delta B_l K_l e(t) = \\ & 2X^T(t) P_{lc} D_l F_l(t) E_{2l} K_l e(t) \\ & X^T(t) P_{lc} D_l D_l^T P_{lc} X(t) + \\ & e^T(t) K_l^T E_{2l}^T E_{2l} K_l e(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & 2X(t)^T P_{lc} (\Delta A_l - \Delta B_l K_l) X(t) = \\ & 2X(t)^T P_{lc} D_l F_l(t) [E_{1l} - E_{2l} K_l] X(t) \\ & X(t)^T P_{lc} D_l D_l^T P_{lc} X(t) + X^T(t) [E_{1l} - \\ & E_{2l} K_l]^T [E_{1l} - E_{2l} K_l] X(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

将式(3.11)~(3.13)代入(3.10)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & \sum_{l=1}^m \eta_l X(t)^T \{ (A_l - B_l K_l)^T P_{lc} + \\ & P_{lc} (A_l - B_l K_l) + P_{lc} B_l B_l^T P_{lc} + \\ & 2P_{lc} D_l D_l^T P_{lc} + [E_{1l} - E_{2l} K_l]^T [E_{1l} - \\ & E_{2l} K_l] \} X(t) + \sum_{l=1}^m \eta_l e^T(t) [K_l^T K_l + \\ & K_l^T E_{2l}^T E_{2l} K_l] e(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \sum_{l=1}^m \eta_l e^T(t) [(A_l - L_l C_l)^T P_{l0} + \\ & P_{l0} (A_l - L_l C_l) + P_{l0} D_l D_l^T P_{l0} + \\ & K_l^T E_{3l}^T E_{3l} K_l + P_{l0} L_l H_l H_l^T L_l^T P_{l0}] e(t) + \\ & \sum_{l=1}^m \eta_l X^T(t) \{ [E_{1l} - E_{2l} K_l]^T [E_{1l} - \\ & E_{2l} K_l] + E_{3l}^T E_{3l} \} X(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

结合式(3.14)和(3.15)得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{l=1}^m \eta_l X^T(t) S_{1l} X(t) + \sum_{l=1}^m \eta_l e^T(t) S_{2l} e(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^m \eta_l [X^T(t) \ e^T(t)] \begin{bmatrix} S_{1l} & 0 \\ 0 & S_{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \\ & - \lambda_{\min}(S) \left\| \begin{bmatrix} X(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

因此模糊系统(2.2)是二次可稳定的。(证毕)

下面基于矩阵不等式方法(LM I), 给出控制器中反馈增益阵 K_l 和观测器增益阵 L_l 存在的条件及设计方法

矩阵不等式(3.7)等价于

$$\begin{aligned} S_{1l} = & A Q_{lc} + Q_{lc} A^T - (B_l + E_{1l}^T E_{l2}) Y_l - \\ & Y_l^T (B_l + E_{1l}^T E_{l2})^T - (2D_{1l} D_{1l}^T + B_l B_l^T) + \\ & Y_l^T E_{l2}^T E_{l2} Y_l + Q_{lc} F_l^T F_l Q_{lc} < 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中, $Q_{lc} = P_{lc}^{-1}$, $Y_l = K_l Q_{lc}$, $F_l^T = [E_{3l}^T \sqrt{2} E_{1l}^T]$. 记

$$\begin{aligned} M_{1l} = & A Q_{lc} + Q_{lc} A^T - (B_l + E_{1l}^T E_{l2}) Y_l - \\ & Y_l^T (B_l + E_{1l}^T E_{l2})^T - (2D_{1l} D_{1l}^T + B_l B_l^T) \end{aligned}$$

则由 Schur 分解方法得

$$\begin{bmatrix} M_{1l} & E_{l2} & F_l \\ Y_l^T E_{l2}^T & -I & 0 \\ F_l^T & 0 & -L \end{bmatrix} < 0$$

所以反馈增益矩阵为 $K_l = Y_l Q_{lc}^{-1} = Y_l P_{lc}$, $K =$

$\sum_{l=1}^m \eta_l K_{lc}$. 矩阵不等式(3.8)等价于

$$\begin{aligned} S_{2l} = & A_l^T P_{l0} + P_{l0} A_l - C_l^T L_l^T P_{l0} - P_{l0} L_l C_l + \\ & 2P_{l0} D_l D_l^T P_{l0} + 2K_l^T E_{2l}^T E_{2l} K_l + \\ & P_{l0} L_l H_l H_l^T L_l^T P_{l0} < 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

令 $P_{l0} L_l = W$, 则式(3.18)变为

$$\begin{aligned} S_{2l} = & A_l^T P_{l0} + P_{l0} A_l - C_l^T W_l - \\ & W_l C_l + 2K_l^T E_{2l}^T E_{2l} K_l + \\ & 2P_{l0} D_l D_l^T P_{l0} + W_l H_l H_l^T W_l^T < 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

由 Schur^[6] 分解方法得

$$\begin{bmatrix} M_{1l} & D_{1l} D_{1l}^T & W_l F_l \\ D_{1l}^T P_{l0}^T & -I & 0 \\ F_l^T W_l^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

所以观测器增益矩阵为

$$L_l = W_l P_{l0}^{-1}, \quad L = \sum_{l=1}^m \eta_l L_l$$

4 仿真研究

将本文提出的模糊反馈控制用于倒立摆系统, 倒立摆系统的动态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{g \sin x_1 - m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1 / m + M}{l(4/3 - m \cos^2(x_1) / m + M)} + \\ & \frac{\cos x_1 / m + M}{l(4/3 - m \cos^2(x_1) / m + M)^u} u \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中, x_1 为摆与垂线的偏角, x_2 为角速度, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, m 为摆的质量, M 为小车的质量, $2l$ 为摆的长度, u 为作用于小车的力。该例中取 $m = 2 \text{ kg}$, $M = 8 \text{ kg}$, $2l = 1 \text{ m}$ 。

应用如下模糊模型进行模糊建模, 并设计模糊反馈控制器和模糊观测器

$$\begin{aligned} R^1: & \text{if } x_1(t) \text{ is about } 0 \\ & \text{then } x(t) = A_{1x}(t) + B_{1u}(t) \\ & y = C_{1x}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2: & \text{if } x_1(t) \text{ is about } \pm \pi/2 \\ & \text{then } x(t) = A_{2x}(t) + B_{2u}(t) \\ & y = C_{2x}(t) \end{aligned}$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - am l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{4l/3 - am l} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - am l \beta^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a\beta}{4l/3 - am l \beta^2} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [0 \ 1], \quad C_2 = [0 \ 1]$$

$$\beta = \cos 88^\circ$$

模糊隶属函数取为

$$\mu_1(x_1(t)) = \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\{-7[x_1(t) - \pi/4]\}} \right) \times$$

$$\frac{1}{1 + \exp\{-7[x_1(t) + \pi/4]\}}$$

$$\mu_2(x_2(t)) = 1 - \mu_1(x_1(t))$$

$$\Delta A_1 = \mu_2(A_2 - A_1)$$

$$\Delta A_2 = \mu_1(A_1 - A_2)$$

$$\Delta B_1 = \mu_2(B_2 - B_1)$$

$$\Delta B_2 = \mu_1(B_1 - B_2)$$

$$\Delta C_1 = \Delta C_2 = 0$$

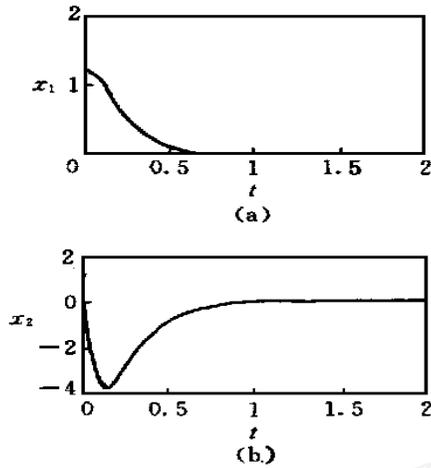


图1 系统状态

(a) 系统状态 x_1 (b) 系统状态 x_2

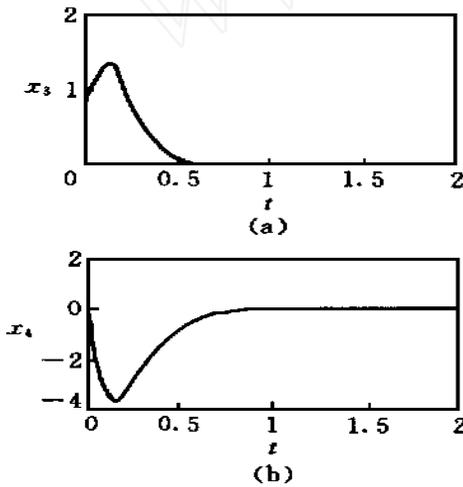


图2 系统状态的观测值

(a) 观测值 x_3 (b) 观测值 x_4

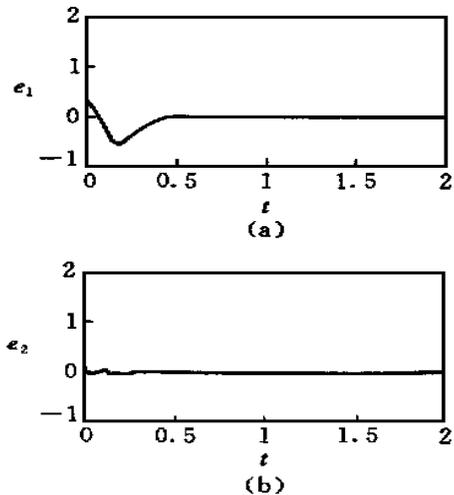


图3 观测误差曲线

(a) 误差曲线 e_1 (b) 误差曲线 e_2

其中

$$a_1 = \frac{2g}{\pi(4l/3 - am l\beta^2)} - \frac{2g}{(4l/3 - am l)}$$

$$b_1 = \frac{a\beta}{4l/3 - am l\beta^2} - \frac{a}{4l/3 - am l}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = [a_1 \quad 0]$$

$$E_{12} = b_1, \quad D_2 = D_1, \quad E_2 = -E_1$$

$$E_{21} = -E_{11}, \quad F_1 = \mu_1, \quad F_2 = \mu_2$$

假设条件1成立。通过解LM I不等式(3-18)和(3-19)可得反馈控制增益和观测器增益为

$$K_1 = [403 \quad 2 \quad 974 \quad 1], \quad K_2 = [14 \quad 032 \quad 5 \quad 159]$$

$$L_1 = [250 \quad 300], \quad L_2 = [250 \quad 300]$$

选取初始条件: $x_1(0) = 68^\circ; x_2(0) = 0, x_3(0) = x_1(0) = 68^\circ; x_4(0) = x_2(0) = 0$, 仿真结果如图1~图3所示。

5 结 论

本文利用模糊 T-S 模型对一类不确定非线性系统进行局部建模, 得到一组不确定模糊系统, 给出了基于观测器的动态输出反馈控制律实现模糊系统二次稳定的充分条件, 并指出输出反馈控制律可由两个 LM I 的求解构造。仿真结果证明了所提出的控制方法的有效性。

参考文献:

- [1] Tanak T, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156
- [2] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, control theory and linear matrix inequalities[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 1-13
- [3] Xiaojun Ma, Zengqi Sun, Yanyan He. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 6(1): 41-51.
- [4] Shuguang Cao, Neville W Rees, Gang Feng. Analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems[J]. Int J Control, 1996, 6(64): 1069-1087.
- [5] 张金明, 李人厚. 模糊控制系统的系统化设计和稳定性分析[J]. 自动化学报, 1999, 25(4): 493-497.
- [6] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui Ectal. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994