文章编号: 1001-0920(2001)05-0545-04

一类输入为扇区非线性的不确定动力系统的指数镇定

支丽霞[1], 王 红[2]
(1. 石油大学 基础部, 北京 100022; 2. 南开大学 数学科学学院, 天津 300071)

摘 要: 研究一类输入为扇区非线性的不确定动力系统的指数镇定问题, 在假设系统不确定性满足匹配条件的情况下, 基于 Lyapunov 稳定性理论给出了一种连续型的鲁棒指数镇定控制器方案。在模型的部分不确定上界未知时修改了控制器, 并得出全局渐近收敛的结果。算例仿真结果证实了设计方案的有效性。

关键词: 扇区非线性; 不确定性; 指数稳定性; Lyapunov 方法
中图分类号: TP 13 文献标识码: A

Robust Exponential Stabilization for Uncertain Dynamic Systems with Sector Nonlinearities

ZHI Li-xia[1], *WANG Hong*[2]
(1. Department of Basic Science, University of Petroleum, Beijing 100022, China;
2. College of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: The problem of exponential stabilization for a class of uncertain systems with sector nonlinear input is discussed. Under the matching condition, a kind of continuous robust controller is presented based on Lyapunov stability theory, which guarantees exponential stability of the closed-loop systems. Moreover, when the upper bounds of some uncertainties are unknown, the control is revised to guarantee globally asymptotical stabilization. A numerical example demonstrates the effectiveness of the proposed method.

Key words: sector nonlinearity; uncertainty; exponential stability; Lyapunov method

1 引 言

不确定非线性动力系统的鲁棒镇定, 一直是控制理论界深受重视的课题之一[1~6]。最近, 文献[7]应用变结构控制讨论了一类输入为非线性的线性不确定系统的镇定问题, 在系统不确定性满足匹配条件下, 利用滑模控制取得了较好的镇定效果。文献[8]基于无源性理论, 针对文献[7]中的不确定系统, 利用切换来克服系统的不确定性, 使系统具有一定的鲁棒性, 并将研究结果推广到非线性系统。但他们都只考虑了使闭环系统渐近稳定, 没有涉及闭环系统的指数稳定性。然而在一些实际应用中, 常需要闭

收稿日期: 2000-06-20; 修回日期: 2000-11-14
基金项目: 国家自然科学基金项目(19771066); 陕西省自然科学基金项目(97CS0101)
作者简介: 支丽霞(1976—), 女, 河南商水人, 硕士生, 从事非线性控制、机器人控制等研究; 王红(1962—), 女, 北京人, 教授, 博士生导师, 从事微分几何理论、非线性控制等研究。

环系统是指数稳定的, 因为指数稳定的系统具有清晰的暂态性能等优点。这使得对其研究更为重要。

本文针对文献[8] 的输入为扇区非线性的不确定动力系统在标称系统可反馈指数稳定的条件下, 基于 Lyapunov 理论设计了一种非线性鲁棒状态反馈控制器。所设计的控制器控制作用连续, 且可保证反馈后的闭环系统是指数稳定的。另外, 在部分不确定性上界未知时, 我们修改了原来的控制律, 设计了一种简单的自适应鲁棒控制器, 仍可使整个闭环系统达到全局渐近稳定。

2 问题描述与假设

考虑下列不确定非线性动力系统

$$\mathring{x} = f(x) + \Delta f(x) + [g(x) + \Delta g(x,q)]\Phi(u) + p(x,t) \tag{1}$$

式中, $x \in R^n$ 是系统的状态, $u(t) \in R^m$ 是控制输入, $\Phi: R^m \to R^m$ 连续; $\Phi(0) = 0$, $q(t) \in R^p$ 是不确定参数向量; $f(x)$, $\Delta f(x)$, $g(x)$, $\Delta g(x)$, $p(x,t)$ 是具有适当维数的光滑函数或矩阵。

设 $f(0) = 0$, 不确定向量 $q(\cdot): R \to R^p$ 是 Lebesgue 可测函数, 其值域 $\Omega \subset R^p (0 \in \Omega)$ 是一给定闭集且有界。用 $\|x\|$ 表示向量或矩阵 x 的 Euclidean 模, ∇_x 表示对 x 的梯度算子, $\lambda_{\max}(W)$, $\lambda_{\min}(W)$ 分别表示矩阵 W 的最大、最小特征值。下面给出一些假设条件:

假设 1 对于 $\forall x \in R^n$, $q \in \Omega$ 和 $t \in R$, 存在有界连续函数 $H(x,q)$, $E(x,p)$, $F(x,t)$ 及 $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$, $\beta_3(x)$, 使得

$$\Delta f(x,q) = g(x)H(x,q)$$
$$\Delta g(x,q) = g(x)E(x,q)$$
$$p(x,t) = g(x)F(x,t)$$
$$\max_{q\in\Omega} \|H(x,q)\| \le \beta_1(x)$$
$$\max_{q\in\Omega} \|E(x,q)\| \le \beta_2(x) < 1$$
$$\max_{t} \|F(x,t)\| \le \beta_3(x)$$

假设 2 非线性输入 $\Phi(u)$ 满足

$$h_1 u^{\mathrm T} u \le u^{\mathrm T}\Phi(u) \le h_2 u^{\mathrm T} u$$

其中 $$h_2 \ge h_1 > 0$$

假设 3 存在 $\alpha(x)$ 使得

$$\mathring{x}(t) = f(x) + g(x)\alpha(x)$$

是指数渐近稳定的, 即对 $\forall x \in R^n$, 存在正定函数 $V(\cdot): R^n \to [0, \infty]$, 满足

$$\lambda_{\min}\|x\|^2 \le V(x) \le \lambda_{\max}\|x\|^2, \quad \dot{V} \le -\eta V(x)$$

其中 $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ 和 η 是正定的常数。

3 主要结果

定理 1 如果不确定非线性系统(1) 满足假设 1～ 假设 3, 则存在下列非线性反馈控制

$$u(x) = \frac{\alpha(x)}{a} - \frac{\mu(x)}{a(\|\mu(x)\| + \epsilon\|x\|^2)}\gamma(x) \tag{2}$$

可使相应的闭环系统是指数渐近稳定的。

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\|x(t_0)\|\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha(t - t_0)\right\} \tag{3}$$

其中, $\mu = \gamma(x)g^{\mathrm T}(x)\nabla_x V(x)$, ϵ 是满足 $\alpha = \eta - \epsilon/\lambda_{\min} > 0$ 的正定的常数, $\gamma(x)$, k_1, a, $\Psi(x)$ 分别决定如下

$$\gamma(x) \ge \frac{\|\Psi(x)\|}{1 - k_1}$$

$$k_1 = \frac{h_2 - h_1 + \beta_2(h_2 + h_1)}{h_2 + h_1 + \beta_1(h_2 - h_1)}$$

$$a = \frac{h_2 + h_1 + \beta_2(h_2 - h_1)}{2}$$

$$\Psi(x) = k_1\|\alpha(x)\| + \beta_1(x) + \beta_3(x)$$

注 1 由 $\beta_2 < 1$, 易知 $k_1 < 1$, 所以 γ 为一正数。

证明 在假设 3 成立的条件下, 可知存在 $\alpha(x)$ 使得 $\mathring{x} = f(x) + g(x)\alpha(x)$ 是指数渐近稳定的。系统(1) 经反馈 $u = \alpha(x)/a + v$ 变为

$$\mathring{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + ag(x) \times \left[v + \frac{I + E(x,q)}{a}\Phi\left(\frac{\alpha(x)}{a} + v\right) - \left(\frac{\alpha(x)}{a} + v\right) + \frac{H(x,q)}{a} + \frac{F(x,t)}{a}\right]$$

由假设 1 得

$$\left\|\frac{H(x,q)}{a}\right\| \le \frac{\beta_1(x)}{a}$$

$$\left\|\frac{F(x,t)}{a}\right\| \le \frac{\beta_3(x)}{a}$$

$$\left[\frac{(1 - \beta_2)h_1}{a} - 1\right]\left(\frac{\alpha(x)}{a} + v\right)^{\mathrm T}\left(\frac{\alpha(x)}{a} + v\right) \le \left[\frac{(1 + \beta_2)h_2}{a} + 1\right]\left(\frac{\alpha(x)}{a} + v\right)^{\mathrm T}\left(\frac{\alpha(x)}{a} + v\right)$$

从而可得

$$\frac{I + E(x,q)}{a}\Phi\left(\frac{\alpha(x)}{a} + v\right) - \left(\frac{\alpha(x)}{a} + v\right) + \frac{H(x,q)}{a} + \frac{F(x,t)}{a} \le \frac{k_1\|\alpha(x)\| + \beta_1(x) + \beta_3(x)}{a} + k_1\|v\| =$$

$$\psi(x)/a + k_1\|v\|$$

取假设 3 中的正定函数 $V(x)$ 作为闭环系统的 Lyapunov 函数，则有

$$\dot{V} \le -\eta V(x) + \nabla_x^{\mathrm{T}} V a g\left(v + \frac{\psi(x)}{a} + k_1\|v\|\right)$$

取 $v(x) = \dfrac{-\mu(x)}{a(\|\mu(x)\| + \epsilon\|x\|^2)}\gamma(x)$，则得

$$\dot{V} \le -\eta V(x) + \frac{\epsilon}{\lambda_{\min}}V(x) - \|g^{\mathrm{T}}\nabla_x V\| \times (1-k_1)\left(\gamma - \frac{\psi}{1-k_1}\right) \le -\alpha V(x)$$

故有

$$V(x(t)) \le V(x(t_0))\exp\{-\alpha(t-t_0)\}$$

由 $\lambda_{\min}\|x\|^2 \le V(x) \le \lambda_{\max}\|x\|^2$，得

$$\|x(t)\|^2 \le V(x)/\lambda_{\min} \le \frac{V(x(t_0))}{\lambda_{\min}}\exp\{-\alpha(t-t_0)\} \le \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\|x(t_0)\|^2\exp\{-\alpha(t-t_0)\}$$

故有式(3) 成立。(证毕)

注 2　由式(2) 知

$$\|u(x)\| \le \frac{\|\alpha(x)\| + \gamma(x)}{a}$$

因此在不确定上界已知的情况下，设计的反馈控制 $u(x)$ 是有界的。

在上述控制律中，我们假定不确定性上界 $\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x)$ 是已知的。受文献[9] 的启发，在下面的定理中，我们放松这一条件，即在部分不确定上界 $\beta_1(x)$ 和 $\beta_3(x)$ 未知时设计控制律。

定理 2　若系统不确定性上界 $\beta_1(x)$ 和 $\beta_3(x)$ 未知，修改的辅助控制律如下

$$u(x,t) = \frac{\alpha(x)}{a} - \frac{\mu(x,t)\gamma(x,t)}{a(\|\mu(x,t)\| + \epsilon\|x\|^2)} \tag{4}$$

其中 $\mu(x,t)$ 和 $\gamma(x,t)$ 分别确定如下

$$\mu(x,t) = \gamma(x,t)g^{\mathrm{T}}\nabla_x V$$

$$\gamma(x,t) \ge \frac{\hat{\psi}(x,t)}{(1-k_1)}, \quad \dot{\hat{\psi}} = c g^{\mathrm{T}}\nabla_x V$$

则在此控制律下，整个闭环控制系统仍是全局渐近稳定的。

证明　选用 Lyapunov 函数 $V' = V + \dfrac{1}{2c}(\hat{\psi} - \psi)^2$。与定理 1 的证明类似，则有

$$\dot{V}' \le -\left(\eta - \frac{\epsilon}{\lambda_{\min}}\right)V(x) - \|g^{\mathrm{T}}\nabla_x V\| \times (1-k_1)\left(\gamma - \frac{\hat{\psi}(x,t)}{1-k_1}\right) \le -\alpha V(x)$$

故定理 2 得证。

注 3　定理 2 提出了一种简单的自适应鲁棒控制策略，它比传统的自适应控制计算量少得多，更易于实现，且能使闭环系统达到全局渐近稳定。但定理 2 只考虑了 $\beta_1(x)$ 和 $\beta_3(x)$ 未知的情况，对 $\beta_2(x)$ 未知的情况未加考虑。

作为上述定理的一个特例，考虑下列输入为扇区不确定动力系统

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)\Phi(u) + f(t) \tag{5}$$

式中，$x \in R^n$，$u \in R^m$，$\Phi: R^m \to R^n$ 连续，$\Phi(0) = 0$，ΔA 和 ΔB 分别为矩阵 A 和 B 的不确定性。

假设 4　矩阵对 (A, B) 完全可控，且存在正常数 $\alpha_n > 0$，正定阵 $Q > 0$，使下列 Riccati 方程

$$(A + BK + \alpha_n I)^{\mathrm{T}}P + P(A + BK + \alpha_n I) + Q = 0$$

有正定对称解 $P > 0$。

假设 5　不确定性满足匹配条件，即存在矩阵 H, E, G，满足

$$\Delta A = BH, \quad \|H\| \le \beta_1$$
$$\Delta B = BE, \quad \|E\| \le \beta_2$$
$$f(t) = BG, \quad \|G\| \le \beta_3$$

假设 6　非线性输入 $\Phi(u)$ 满足

$$h_1 u^{\mathrm{T}}u \le u^{\mathrm{T}}\Phi(u) \le h_2 u^{\mathrm{T}}u$$

其中　$\beta_2 < 1$，$h_2 \ge h_1 > 0$

取 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$，由定理 1 不难得到如下结论：

推论 1　假定系统满足假设 4～假设 6，则存在下列非线性状态反馈控制

$$u(x) = \frac{Kx}{a} - \frac{B^{\mathrm{T}}Px\hat{\gamma}^2(x)}{a(\|B^{\mathrm{T}}Px\|\gamma^2(x) + \delta\|x\|^2)} \tag{6}$$

可使反馈后的闭环系统是指数稳定的，且有

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|x(t_0)\|\exp\left\{-\frac{1}{2}\beta(t-t_0)\right\}$$

其中

$$\hat{\gamma} \ge \frac{k\|x\| + \beta_3}{1-k_1}, \quad k = k_1\|K\| + \beta_1$$

k_1 和 a 的取值与定理 1 相同，δ 是满足 $\beta = \alpha_n - \delta/\lambda_{\min}(P) > 0$ 的正定的常数，α_n 和 P 的取法满足假设 4。

4 仿真实例

考虑如下线性不确定方程[8]

$$\dot{x} = Ax + B(\Phi(u) + E\Phi(u) + Hx + G) \quad (7)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [0.6\sin x_1 \quad 0], \quad x = [x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}[(h_2 + h_1) - (h_2 - h_1)\cos(10u)]u$$

$$E = 0.4\sin u, \quad G = 0.6\sin 5t$$

$$h_1 = 0.5, \quad h_2 = 1.5$$

显然, 可取 $\beta_1 = 0.6, \beta_2 = 0.4, \beta_3 = 0.6$。再取

$$K = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta = \frac{1}{2}$$

即可满足推论 1 的条件。通过 Matlab 仿真得到图 1 的仿真结果, 其中系统(7)的初始状态取为 $x_1 = 1.5, x_2 = 2.0$。与文献[8]的结果相比, 由于可以通过适当选取 δ 而增大 β, 故本文所采用的控制律可使系统收敛速度更快。当 β_1 和 β_3 未知时, 采用定理 2 所设计的自适应控制器, 所得的仿真结果如图 2 所示。由图 1 和图 2 可以看出, 采用本文给出的控制律, 无论是在不确定界已知还是未知的情况下, 都能得到很好的暂态性能。

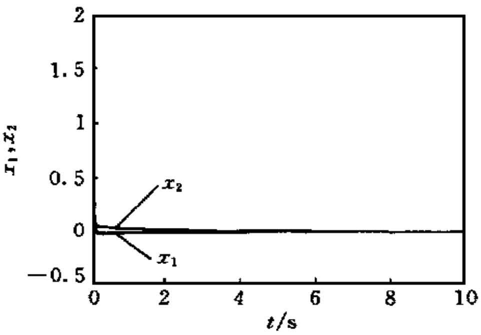

图 **1** 满足推论 **1** 条件的仿真结果

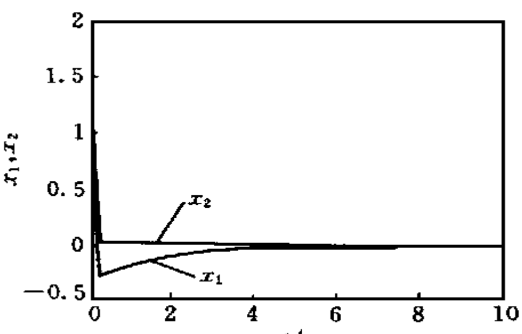

图 **2** 采用定理 **2** 自适应控制器的仿真结果

5 结 论

本文研究了一类输入为扇区非线性的不确定系统的反馈指数镇定问题, 给出了镇定这类系统的一种新的鲁棒控制方法。与文献[8]相比, 本文给出的控制律能使系统具有清晰的暂态性能, 且所设计的控制律控制作用连续, 避免了文献[8]中由于引入符号函数而引起的抖颤现象。

参考文献:

[1] Barmish B R, Corless M J, Leiman G. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems [J]. SIAM J Contr Optim, 1983, 21(2): 246-255.

[2] Wu H S, Mizukami. Exponential stability of a class of nonlinear dynamical systems with uncertainties [J]. System & Contr Lett, 1993, 21(5): 307-313.

[3] Chen Y H, Leiman G. Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions[J]. Int J Control, 1987, 45(5): 1527-1542.

[4] Chen Y H. Design of robust controllers for uncertain dynamical systems [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1988, 33(5): 487-491.

[5] Chen C C, Hsieh J G, Huang J H *et al*. Some generalizations on the ultimate boundness control of uncertain systems[J]. Int J Syst Sci, 1994, 25(9): 1473-1488.

[6] Qu Z, Dawson D M. Continuous feedback control guaranteeing exponential stability for uncertain dynamical system[A]. Proc of the 30th IEEE Conf on Decis and Contr[C]. United Kingdom, 1991. 2636-2638.

[7] Kou C H. Variable structure control design for uncertain dynamic systems with sector nonlinearities[J]. Automatica, 1998, 34(4): 505-508.

[8] 张侃健, 冯纯伯, 费树岷. 输入为扇区非线性的不确定系统的鲁棒镇定[J]. 控制与决策, 2000, 15(2): 227-230.