文章编号: 1001-0920(2001)05-0553-04

# 航迹辨识系统中约束方差滤波的容许模型噪声

盛安冬[1], 王远钢[1], 刘 健[2], 戚国庆[1], 郭 治[1]
(1.南京理工大学 自动化系,江苏 南京 210094;2.中国南方工业集团公司,北京 100089)

摘 要: 根据Kalman滤波的最小方差特性,分析测量噪声一定时Kalman滤波方差随系统模型噪声强度变化的规律,并在模型噪声和测量噪声一定时,给出求解当前估计型稳态Kalman滤波的LMI方法。针对测量噪声一定的系统设计一种滤波器,它在保证滤波误差方差满足指定上界约束下,容许系统有尽可能大强度的模型噪声,并用航迹辨识系统的算例对所给出的结果做了说明。

关键词: LMI方法;满意滤波;航迹辨识
中图分类号: TP 273 文献标识码: A

# Admissible Model Noise of Variance-constrained Filter in a Trajectory Identification System

*SHENG An-dong*[1], *WANG Yuan-gang*[1], *LIU Jian*[2], *QI Guo-qing*[1], *GUO Zhi*[1]
(1. Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China; 2. China South Industries Group, Beijing 100089, China)

**Abstract**: With the least-variance characteristic of Kalman filter, the relation between the variance of Kalman filter and intensities of model noise is first analyzed under the condition of a given measurement noise, then an LMI approach-based solution to steady current-estimation-type filter is presented when both intensities of model noise and measurement noise are fixed. For the system with given measurement noise and the restriction of error-variance upper-bound, the filter admits the system to have model noise with intensity as large as possible. An example of the trajectory identification system is proposed to demonstrate the conclusion.

**Key words**: LMI approach; satisfactory filter; trajectory identification

## 1 引 言

经典Kalman滤波是一种最小方差滤波,并未顾及系统的鲁棒性。而在一些实际工程中,往往只要求估计误差方差满足一定的上界,且具有一定的鲁棒性。有关估计误差方差约束的滤波问题,一般采用矩阵分解方法来求解[1,2]。

本文基于某$C^3I$系统中的航迹辨识问题,研究一种Kalman当前估计型稳态满意滤波[3]的设计问题。当测量噪声强度给定时,该滤波器在满足指定的估计误差方差上界约束下,容许系统有尽可能大强度的模型噪声。其工程意义在于:当传感器系统选定后,在满足估计误差方差精度的前提下,滤波器能尽可能大范围地适应目标的机动。首先根据Kalman

收稿日期: 2000-08-07; 修回日期: 2001-04-20
基金项目: 南京市回国人员基金项目(宁人字[2000]4号)
作者简介: 盛安冬(1964—),男,浙江嘉兴人,副教授,博士,从事满意滤波在火力指挥控制中的应用研究;郭治(1937—),男(满族),辽宁义县人,教授,博士生导师,从事满意控制和火力控制等研究。

滤波的最小方差特性, 揭示了测量噪声一定时Kalman滤波方差随系统模型噪声强度变化的规律, 并在系统模型噪声和测量噪声一定时, 给出求解当前估计型稳态 Kalman 滤波的 LMI 方法; 然后将所研究的满意滤波的设计问题成功地转化成 LMI 约束的求解问题, 该问题可借助于 Matlab-LMI 计算软件进行求解, 并给出了作为滤波误差方差上界的指标应满足的条件。

## 2 问题描述

假设存在如下定常随机系统

$$(\Sigma):\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{v}(k) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(k)$ 为 $n$ 维状态向量, 且初始均值为 $\boldsymbol{x}_0$, 方差为 $X_0$; $\boldsymbol{y}(k)$ 为 $m$ 维测量向量; $\boldsymbol{w}(k)$ 为零均值、强度为 $W$ 的 $n$ 维正态模型噪声; $\boldsymbol{v}(k)$ 为零均值、强度为 $V$ 的 $m$ 维正态测量噪声; $A$ 为 $n\times n$ 状态转移矩阵, $C$ 为 $m\times n$ 测量系数矩阵, 且矩阵对 $(A, C)$ 可观测。

对于系统 $(\Sigma)$, 考虑如下形式的当前估计型稳态滤波器

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = A\hat{\boldsymbol{x}}(k) + K[\boldsymbol{y}(k+1) - CA\hat{\boldsymbol{x}}(k)] \tag{2}$$

其中 $K$ 为待定定常滤波增益。则估计误差 $\boldsymbol{e}(k+1):=\boldsymbol{x}(k+1)-\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)$, 满足如下滤波方程 $(\Sigma_e)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(k+1) = {} & (I-KC)A\boldsymbol{e}(k) + \\ & (I-KC)\boldsymbol{w}(k) - K\boldsymbol{v}(k)\end{aligned} \tag{3}$$

其相应稳态滤波方差

$$P:=\lim_{k\to\infty}P_k:=\lim_{k\to\infty}E\{\boldsymbol{e}(k)\boldsymbol{e}(k)^{\mathrm{T}}\} \tag{4}$$

满足

$$\begin{aligned}P = {} & (I-KC)(APA^{\mathrm{T}}+W)(I- \\ & KC)^{\mathrm{T}} + KVK^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{5}$$

为了叙述方便, 本文除常用标准符号外, 对于两个同维向量 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$, 用 $\boldsymbol{M}\leq\boldsymbol{N}$ 表示各分量不等式同时成立; $\mathrm{diag}(P)$ 表示方阵 $P$ 的主对角元素组成的行向量。并引入如下记号

$$\begin{aligned}f(P,K):= {} & -P+(I-KC)(APA^{\mathrm{T}}+ \\ & W)(I-KC)^{\mathrm{T}}+KVK^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{6}$$

对于当前型估计(2), 其稳态Kalman 滤波增益 $K$ 与相应稳态误差方差 $P$ 满足

$$\begin{aligned}K = {} & (APA^{\mathrm{T}}+W)C^{\mathrm{T}}[C(APA^{\mathrm{T}}+ \\ & W)C^{\mathrm{T}}+V]^{-1}\end{aligned} \tag{7}$$

将式(7) 代入(5), 可得误差方差阵 $P$ 的代数 Riccati 方程

$$\begin{aligned}P = {} & APA^{\mathrm{T}} - (APA^{\mathrm{T}}+W)C^{\mathrm{T}}[C(APA^{\mathrm{T}}+ \\ & W)C^{\mathrm{T}}+V]^{-1}C(APA^{\mathrm{T}}+W)+W\end{aligned} \tag{8}$$

由式(8) 可得当前估计型稳态 Kalman 滤波的误差方差及滤波增益。

本文的目的是根据 Kalman 滤波的最小误差方差特性, 给出求解稳态当前估计型 Kalman 滤波的 LMI 方法; 在此基础上研究系统测量噪声固定时, 具有误差方差上界约束的满意滤波, 使其容许系统有尽可能大强度的时不变模型噪声。

## 3 主要结论

**定理 1** 滤波增益 $K$ 使误差系统 $(\Sigma_e)$ 渐近稳定, 当且仅当矩阵变量 $Q$ 的不等式

$$f(Q,K) < 0 \tag{9}$$

有正定解, 并且若滤波增益 $K$ 使误差系统 $(\Sigma_e)$ 渐近稳定, 则相应 $(\Sigma_e)$ 的稳态方差阵 $P$ 是集合 $\Omega(K)$ 的下确界, 从而 $P$ 可通过求解 $\min\{\mathrm{tr}Q: Q\in\Omega(K)\}$ 得到。这里 $\Omega(K):=\{Q: Q$ 正定且满足不等式(9)$\}$。

证明 定理的前半部分可由离散方程的 Lyapunov 稳定性理论证得。设 $K$ 是使系统 $(\Sigma_e)$ 渐近稳定的任一滤波增益, 则式(9) 总有正定解, 且其任一正定解 $Q$ 必满足 $Q > P$。而对任意正整数 $m$, 若记 $Q_m$ 为如下方程的唯一正定解

$$\begin{aligned}& (I-KC)(AQA^{\mathrm{T}}+W)(I-KC)^{\mathrm{T}} - \\ & Q + KVK^{\mathrm{T}} + \frac{1}{m}I = 0\end{aligned}$$

则 $Q_m$ 满足式(9), 从而矩阵列 $\{Q_m\}$ 单调递减, 且 $Q_m > P$。上式关于 $m$ 取极限, 即得 $Q_m$ 以 $P$ 为极限(因为 $P$ 是式(5) 的唯一正定解), 因此 $P$ 是解集 $\Omega(K)$ 的下确界。而式(9) 是矩阵变量 $Q$ 的线性不等式, 所以 $\Omega(K)$ 是凸矩阵集, 且 $\Omega(K)$ 的下确界 $P$ 就是 $\min\{\mathrm{tr}Q: Q\in\Omega(K)\}$ 相应的极小阵。(证毕)

记 $\Omega=\{(P,K)\mid f(P,K)<0, P>0\}$。由 Kalman 滤波误差方差阵 $P_{\mathrm{Kal}}$ 最小可得, 对所有 $(P,K)\in\Omega$, 均有 $P_{\mathrm{Kal}} < P$, 且 $P_{\mathrm{Kal}}$ 是 $\Omega$ 的下确界, 故 $(P_{\mathrm{Kal}}, K_{\mathrm{Kal}})$ 是如下约束极值问题的相应极小点。

$$\min\{\mathrm{tr}P\mid f(P,K)<0\} \tag{10}$$

**定理 2** 当随机测量噪声强度 $V$ 固定时, 误差系统 $(\Sigma_e)$ 的稳态Kalman 滤波方差阵 $P$ 是模型噪声强度 $W$ 的单调递增函数, 即若 $0 < W_1 < W_2$, 则 $P_1\leq P_2$, 其中 $P_i$ 分别是相应于 $W_i(i=1,2)$ 的稳态 Kalman 滤波方差阵。

证明 记 $P_i$ 相应的稳态Kalman 滤波为 $K_i$, 则对 $P_2$ 和 $K_2$, 有

$$(I - K_2C)(AP_2A^{\mathrm{T}} + W_2)(I - K_2C)^{\mathrm{T}} - P_2 + K_2VK_2^{\mathrm{T}} = 0$$

由 $0 < W_1 < W_2$, 易得

$$(I - K_2C)W_1(I - K_2C)^{\mathrm{T}} \leq (I - K_2C)W_2(I - K_2C)^{\mathrm{T}}$$

从而有

$$f(P_2, K_2; W_1) := (I - K_2C)(AP_2A^{\mathrm{T}} + W_1)(I - K_2C)^{\mathrm{T}} - P_2 + K_2VK_2^{\mathrm{T}} \leq 0$$

而 $P_1$ 是相应于模型噪声强度 $W_1$ 的稳态 Kalman 滤波方差, 从而对如下不等式的任意解 $(P, K)$

$$f(P, K; W_1) := (I - KC)(APA^{\mathrm{T}} + W_1)(I - KC)^{\mathrm{T}} - P + KVK^{\mathrm{T}} < 0, \quad P > 0 \tag{11}$$

均有 $P_1 < P$。而式(11) 显然存在一个解序列 $(P^{(m)}, K^{(m)})$, 以 $(P_2, K_2)$ 为极限, 所以有 $P_1 \leq P_2$。(证毕)

记 $Q = P^{-1}, S = QK$, 则 $f(P, K) < 0, P > 0$ 等价于

$$(Q - SC)(AQ^{-1}A^{\mathrm{T}} + W)(Q - SC)^{\mathrm{T}} + SVS^{\mathrm{T}} - Q < 0, \quad Q > 0 \tag{12}$$

**定理 3**　设 $(Q_*, S_*)$ 是如下 LMI

$$\begin{bmatrix} -Q & QA - SCA & Q - SC & S \\ (QA - SCA)^{\mathrm{T}} & -Q & 0 & 0 \\ Q - C^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} & 0 & -W^{-1} & 0 \\ S^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -V^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

约束极大值问题 $\max\{\mathrm{tr}(Q)\}$ 的极值点, 则系统$(\Sigma)$ 的稳态 Kalman 滤波增益及误差方差分别为

$$K_{\mathrm{Kal}} = (Q_*)^{-1}S_*, \quad P_{\mathrm{Kal}} = (Q_*)^{-1}$$

证明　利用 Schur 补引理, 易得 $(Q, S)$ 的非线性不等式(12) 有解, 等价于 $(Q, S)$ 的 LMI(13) 有解, 因而由上述分析即得定理结论。(证毕)

当系统没有模型噪声, 即 $W = 0$ 时, 设 $Q_0$ 是变量 $Q$ 和 $S$ 的如下不等式

$$\begin{bmatrix} -Q & QA - SCA & S \\ (QA - SCA)^{\mathrm{T}} & -Q & 0 \\ S^{\mathrm{T}} & 0 & -V^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

约束下 $\max\{\mathrm{tr}(Q)\}$ 相应的极大阵, 则 $P_0 = (Q_0)^{-1}$ 为相应稳态 Kalman 滤波的误差方差阵。对于满足 $\sigma^2 > \mathrm{diag}(P_0)$ 的方差上界指标 $\sigma^2$, 当系统含有小强度模型噪声时, 总存在一种定常滤波, 使方差约束 $\mathrm{diag}(P) < \sigma^2$ 得以满足。特别地, 研究一种滤波, 使其在满足方差约束 $\mathrm{diag}(P) < \sigma^2$ 下, 容许系统有尽可能大强度的模型噪声, 具有实际工程意义。

对于给定方差上界指标 $\sigma^2$: $\sigma^2 > \mathrm{diag}(P_0)$, 根据定理 2, 要获得方差约束 $\mathrm{diag}(P) < \sigma^2$ 下滤波器能辨识强度尽可能大的模型噪声, 就要求满足 $\mathrm{diag}(P) < \sigma^2$ 的所有滤波方差阵中非对角元可取尽可能大数值的矩阵 $P$。

现给出本文所研究问题的一种滤波设计方法如下:

Step1: 利用 Matlab-LMI 解 $(M, Q, S)$ 在 LMI

$$\begin{bmatrix} -Q & QA - SCA & Q - SC & S \\ (QA - SCA)^{\mathrm{T}} & -Q & 0 & 0 \\ Q - C^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} & 0 & -M & 0 \\ S^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -V^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 & I \\ I & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

约束下 $\min\{\mathrm{tr}M\}$ 的相应极小点 $(M_L, Q_L, S_L)$, 其中矩阵 $P_1$ 和 $P_0$ 具有相同非对角元素, 且 $\mathrm{diag}(P_1) = \sigma^2$。则 $K = (Q_L)^{-1}S_L$ 为一满足方差约束 $\mathrm{diag}(P) \leq \sigma^2$ 的鲁棒滤波, 它容许系统有强度为 $W_U = (M_L)^{-1}$ 的模型噪声, 亦即对所有强度为 $W$: $0 < W < W_U$ 的模型噪声, 该滤波的稳态误差方差均满足 $\mathrm{diag}(P) \leq \sigma^2$。

Step2: 对 $W := W_U$, 根据定理 3 求出相应的 $P_{\mathrm{Kal}}$, 并令 $P_0 := P_{\mathrm{Kal}}$, 然后返回 Step1, 直至 $P_0$ 的非对角元素不再增加为止。因为每步都是求解凸优化问题, 一般经几次循环便可获得较满意的结果。

## 4　算　例

某航迹辨识系统的参数分别为

$$V = 9 \times 10^6, \quad C = [1, 0, 0]$$

$$W = \begin{bmatrix} 6\,542.45 & 987.54 & 0.625 \\ 987.54 & 198.125 & 10 \\ 0.625 & 10 & 160 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0.621 \\ 0 & 1 & 0.063 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据定理 1, 利用 Matlab-LMI 软件, 解得稳态 Kalman 滤波增益 $K_{\mathrm{Kal}}$ 及误差方差 $P_{\mathrm{Kal}}$ 分别为

$$K_{\mathrm{Kal}} = \begin{bmatrix} 0.266\,4 \\ 0.004\,1 \\ 0.000\,0 \end{bmatrix}$$

$P_{\mathrm{Kal}} =$

$$\begin{bmatrix} 2.41\times10^{6} & 3.69\times10^{4} & 0 \\ 3.69\times10^{4} & 1.20\times10^{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2.00\times10^{2} \end{bmatrix}$$

通过求解 Riccati 方程得到稳态 Kalman 滤波增益 $K'_{\mathrm{Kal}}$ 和误差方差 $P'_{\mathrm{Kal}}$ 分别为

$$K'_{\mathrm{Kal}} = \begin{bmatrix} 0.2644 \\ 0.0040 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$P'_{\mathrm{Kal}} = \begin{bmatrix} 2.38\times10^{6} & 3.64\times10^{4} & 4.60\times10^{-1} \\ 3.64\times10^{4} & 1.21\times10^{3} & 0.10\times10^{2} \\ 4.60\times10^{-1} & 0.10\times10^{2} & 1.60\times10^{2} \end{bmatrix}$$

当 $W = 0$, $V$ 不变时, 解得

$$P_0 = \begin{bmatrix} 5.52\times10^{2} & 8.77\times10^{-4} & -1.34\times10^{-9} \\ 8.77\times10^{-4} & 2.82\times10^{-9} & -8.93\times10^{-11} \\ -1.34\times10^{-9} & -8.93\times10^{-11} & 1.42\times10^{-9} \end{bmatrix}$$

为进行比较, 假设系统对滤波误差的精度要求为 $\sigma^2 = 4\mathrm{diag}(P_{\mathrm{Kal}})$。根据所给出的设计方法, 循环 3 次便得到满意鲁棒滤波增益

$$K = [0.5482, 0.0039, 0]^{\mathrm{T}}$$

其容许系统的模型噪声强度为

$$W_U = \begin{bmatrix} 1.12\times10^{6} & 3.82\times10^{3} & 1.02 \\ 3.82\times10^{3} & 3.10\times10^{2} & -2.23\times10^{-2} \\ 1.02 & -2.23\times10^{-2} & 7.99\times10^{2} \end{bmatrix}$$

而与该模型噪声相应的滤波误差方差阵为

$$P = \begin{bmatrix} 3.96\times10^{6} & 4.00\times10^{4} & 4.83\times10^{-1} \\ 4.00\times10^{4} & 2.58\times10^{3} & -2.64\times10^{-2} \\ 4.83\times10^{-1} & -2.64\times10^{-2} & 7.99\times10^{2} \end{bmatrix}$$

由此可见, 当给定精度范围 $\sigma^2 = 4\mathrm{diag}(P_{\mathrm{Kal}})$, 且传感器选定时, 便得到系统模型噪声的上界 $W_U$, 从而给出滤波器允许的适应目标的机动最大范围。

## 5　结　　论

本文针对离散随机系统的当前估计型稳态 Kalman 滤波, 在模型和测量噪声固定时, 给出了基于 LMI 方法的求解方法。在此基础上, 给出了求解容许系统有尽可能大强度模型噪声的约束方差滤波方法。该方法也可推广用于研究含有噪声方差约束的其它工程问题。

参考文献:


[1] Wang Zidong, Guo Zhi. Robust constrained variance estimation for discrete systems with model noise intensity uncertainty and its application[J]. Chinese J of Automation, 1996, 8(3): 249-253.

[2] Zidong Wang, Zhi Guo, H Unbehauen. Robust $H_2/H_\infty$-state estimation for discrete-time systems with error variance constraints[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1997, 42(10): 1431-1435.

[3] Guo Zhi. A survey of satisfying control and estimation[A]. Proc of the 14th IFAC Congress[C]. Beijing, 1999. 443-447.


(上接第 552 页)

参考文献:


[1] Hornik K, Stinchcombe M, White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators[J]. Neural Networks, 1989, 2(5): 359-366.

[2] Chen S, Billings S A. Neural networks for nonlinear dynamic system modeling and identification[J]. Int J Control, 1992, 56(2): 319-346.

[3] Sungzoon. Reliable roll force prediction in cold mill using multiple neural networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1997, 21(9): 981-996.

[4] Nikravesh M. Model identification of nonlinear time variant processes via artificial neural network[J]. Computers & Chemical Engineering, 1996, 20(11): 1277-1290.

[5] Wang Yalin, Gui Weihua, Chen Xiaofang *et al*. Neural network modeling for composition prediction of Pb-Zn sinter in imperial smelting process[A]. Proc of the Annual Chinese Automation Conf in the UK[C]. Dxford: Paciland Int Limited, 1999. 21-24.

[6] 王旭东, 邵惠鹤. 基于神经网络的通用软测量技术[J]. 自动化学报, 1998, 24(5): 702-706.

[7] 罗荣福, 邵惠鹤. 分布式网络局部学习方法及其在推断控制中的应用[J]. 自动化学报, 1994, 20(6): 739-742.

[8] Pedrycz W. Conditional fuzzy clustering in the design of radial basis function neural networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1998, 9(4): 601-612.

[9] Chiu S. Fuzzy model identification based on cluster estimation[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 1994, 2(3): 267-278.