第16卷第6期 控 制 与 决 策 2001年11月
Vol 16 No. 6 CONTROL AND DECISION Nov. 2001

文章编号: 1001-0920(2001)06-0898-04

一类混沌系统的单向耦合同步方法及其条件

蒋国平, 王锁萍
(南京邮电学院 电子工程系, 江苏 南京 210003)

摘 要: 利用Lyapunov稳定性理论, 研究一类混沌系统的单向耦合同步问题。提出该类混沌系统单向耦合同步条件, 并将该方法和条件应用于蔡氏混沌电路, 得到单向耦合蔡氏电路混沌同步方法和条件。仿真结果表明了该方法的有效性。

关键词: 单向耦合; 混沌同步; Lyapunov函数
中图分类号: TP 13 **文献标识码**: A

Synchronization for a Class of Chaotic Systems through Unidirectionally Coupling and Its Conditions

JIANG Guo-ping, WANG Suo-ping
(Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Posts & Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: Based on Lyapunov theory, the synchronization for a class of chaotic systems through unidirectionally coupling is studied, and its conditions are presented. Then, the method is applied to Chua's circuit. The synchronization method of unidirectionally coupling Chua's circuits and its conditions are obtained. A simulation example shows its effectiveness.

Key words: unidirectionally coupling; chaotic synchronization; Lyapunov function

1 引 言

混沌系统对初值具有极端敏感性, 也就是说, 结构和参数完全相同的两个混沌系统, 只要初始值稍有不同, 它们的发展轨迹则变得互不相关。因此, 如何控制两个混沌系统, 使得它们的运动轨迹相互跟踪, 即使得两个混沌系统同步问题, 得到了广泛的重视与研究[1~9]。

近年来的研究与应用表明, 混沌同步在通信、控制等领域显示出良好的应用前景[1,2]。Pecora和Carroll提出了混沌同步概念及其驱动-响应方法[3,4], 他们将系统分成两个子系统, 即驱动子系统(D系统)和响应子系统(R系统), 然后对响应子系统进行复制, 并用驱动子系统产生的信号驱动该复制的系统。文献[1]设计出一种利用蔡氏电路产生的混沌信号作为伪信号, 并用驱动-响应方法进行同步的保密通信系统。但是, 对于某些实际的非线性系统, 由于物理本质或天然特性等原因, 系统无法分解为两个子系统, 这时驱动-响应方法也就无能为力了。近年来, 许多学者利用耦合方法实现混沌同步[5~8], 其中文献[5,7,8]利用耦合方法使得两个蔡氏混沌电路同步, 并且文献[7,8]还利用线性系统稳

收稿日期: 2000-08-01; **修回日期**: 2001-04-20
基金项目: 教育部高校骨干教师资助计划项目(2000-02); 信息产业部重点科技发展计划项目(98042)
作者简介: 蒋国平(1966—), 男, 江苏扬中人, 副教授, 博士, 从事混沌非线性系统及其应用研究; 王锁萍(1946—), 男, 江苏丹阳人, 教授, 博士生导师, 从事通讯与电子系统、信号与信号处理等研究。

定性理论研究了耦合蔡氏电路混沌同步的条件。

本文基于单向耦合方法, 研究混沌同步控制问题。与文献[7, 8]不同的的是, 本文利用 Lyapunov 稳定性理论研究混沌同步条件, 并给出了蔡氏电路混沌同步设计方法。

2　蔡氏电路单向耦合混沌系统

蔡氏电路自 1983 年被发现以来[10, 11], 已经得到深入的研究。蔡氏电路主要优点在于结构简单, 但却具有非常复杂的分叉与混沌特性。本节以蔡氏电路为例说明混沌系统的耦合同步方法。

蔡氏混沌电路无量纲方程[7, 10, 11] 为

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha[y - x - f(x)] \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 为系统参数; $f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + E| - |x - E|)$ 为分段(3 段) 线性函数, 斜率分别为 a 和 b, 且 $a < b < 0$, $E > 0$。

将发送端蔡氏电路状态耦合到接收端, 得接收端的蔡氏电路方程如下

$$\begin{cases} \dot{x}' = \alpha[y' - x' - f(x')] + \delta_x(x - x') \\ \dot{y}' = x' - y' + z' + \delta_y(y - y') \\ \dot{z}' = -\beta y' + \delta_z(z - z') \end{cases} \tag{2}$$

由式(1) 和(2) 可得误差系统方程

$$\begin{cases} \dot{p} = \alpha q - \alpha p - \alpha[f(x) - f(x')] - \delta_x p \\ \dot{q} = p - q + r - \delta_y q \\ \dot{r} = -\beta q - \delta_z r \end{cases} \tag{3}$$

其中, $p = x - x'$, $q = y - y'$, $r = z - z'$。

由于 $f(x)$ 为分段线性连续函数, 斜率分别为 a 和 b, 因此

$$a(x - x') \le f(x) - f(x') \le b(x - x') \tag{4}$$

由式(4) 可得

$$f(x) - f(x') = k(x - x') \tag{5}$$

其中 k 为时变参数, 且 $a \le k \le b < 0$。应当指出, 若 x 和 x' 在同一线性区间, 则 $k = a$ 或 b; 若 x 和 x' 不在同一线性区间, 则式(5) 依然成立, 此时 $a < k < b < 0$。

将式(5) 代入式(3) 得到下列变参数线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = M_{(k)} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中时变系统矩阵

$$M_{(k)} = \begin{bmatrix} -\alpha - k\alpha - \delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -\delta_z \end{bmatrix}$$

欲使式(1) 和(2) 所示的两个系统同步, 需要选择合适的$(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$, 使得式(3) 或(6) 渐近稳定, 即

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} r(t) = 0$$

实际应用中, 为方便参数调整, 一般只取一个变量进行耦合。例如取 x 作为耦合变量, 此时 $\delta_y = \delta_z = 0$。则同步系统方程变为

$$\begin{cases} \dot{x}' = \alpha[y' - x' - f(x')] + \delta_x(x - x') \\ \dot{y}' = x' - y' + z' \\ \dot{z}' = -\beta y' \end{cases} \tag{7}$$

误差方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - k\alpha - \delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{8}$$

如果取 y 或 z 作为耦合变量, 同样可给出相应的同步系统及其误差系统。

式(6) 和(8) 所示的误差系统是变参数的线性系统(即线性时变系统), 一般情况下不能利用系统特征根实部为负、Routh 判据等线性系统稳定性理论来研究其稳定性。为此, 我们利用 Lyapunov 稳定性理论研究上述误差系统的稳定性, 解决文献[7, 8] 利用线性系统稳定性理论进行研究存在的缺陷。

3　单向耦合混沌系统同步条件

不失一般性, 考虑如下混沌系统

$$\dot{X}(t) = AX(t) + G(X(t)) \tag{9}$$

其中, $A \in R^{n\times n}$ 为常数矩阵, $X \in R^n$ 为系统状态向量, $AX(t)$ 为线性部分, $G(X(t))$ 为非线性部分。

运用单向耦合方法设计同步混沌系统

$$\dot{X}'(t) = AX'(t) + G(X'(t)) + K(X(t) - X'(t)) \tag{10}$$

其中 $K \in R^{n\times n}$ 为耦合参数。

定理 1　设系统(9) 中 $G(X(t))$ 满足条件 $G(X) - G(X') = M(X - X')$, 其中 $M \in R^{n\times n}$ 为时变矩阵, 如果存在下列条件

$$P > 0, \quad Q = (A - K + M)^{\mathrm{T}}P + P(A - K + M) \le 0 \tag{11}$$

则(9), (10) 两式所示的耦合混沌系统同步。其中, $P > 0$ 表示正定矩阵, $Q \le 0$ 表示半负定矩阵。

证明　由式(9) 和(10) 可得误差系统为

$$\mathring{e}(t) = Ae(t) + G(X(t)) - G(X'(t)) - Ke(t) \tag{12}$$

其中 $e(t) = X(t) - X'(t)$。

选取 Lyapunov 函数为

$$V = e^{\mathrm{T}}Pe, \quad P > 0 \tag{13}$$

由式(13) 得

$$\begin{aligned} \mathring{V} &= \mathring{e}^{\mathrm{T}}Pe + e^{\mathrm{T}}P\mathring{e} = \\ & [(A - K)e + (G(X) - G(X'))]^{\mathrm{T}}Pe + \\ & e^{\mathrm{T}}P[(A - K)e + (G(X) - G(X'))] \end{aligned} \tag{14}$$

由于 $G(X) - G(X') = M(X - X')$, 则式(14) 变为

$$\begin{aligned} \mathring{V} &= [(A - K)e + Me]^{\mathrm{T}}Pe + \\ & e^{\mathrm{T}}P[(A - K)e + Me] = e^{\mathrm{T}}Qe \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $Q = (A - K + M)^{\mathrm{T}}P + P(A - K + M)$。因此, 由 Lyapunov 稳定性理论可知, 如果矩阵

$$\begin{aligned} Q = (A - K + M)^{\mathrm{T}}P + \\ P(A - K + M) \leqslant 0 \end{aligned} \tag{16}$$

则系统(12) 渐近稳定, 即

$$\lim_{t\to\infty} \| e(t) \| = 0 \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty} \| X(t) - X'(t) \| = 0 \tag{18}$$

亦即式(9), (10) 所示的耦合系统同步。(证毕)

令

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \delta_x & 0 & 0 \\ 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{bmatrix}$$

$$G(X) = \begin{bmatrix} -\alpha f(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{19}$$

则式(1) 和(2) 可化为式(9) 和(10) 的形式, 即蔡氏电路耦合系统。

由式(4) 和(5) 知

$$G(X) - G(X') = M(X - X') \tag{20}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} -\alpha k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用定理 1 很容易得到以下结论:

推论 1 如果条件 $P > 0, Q = (A - K + M)^{\mathrm{T}}P + P(A - K + M) \leqslant 0$ 成立, 则式(3) 或(6) 渐近稳定, 即蔡氏电路耦合系统(式(1) 和(2)) 同步。其中矩阵 A, K, M 如式(19) 和(20) 所示。

若令

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \delta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G(X) = \begin{bmatrix} -\alpha f(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

则式(1) 和(7) 可化为式(9) 和(10) 的形式, 即变量 x 耦合系统。同样可得其同步条件如下:

推论 2 如果条件 $P > 0, Q = (A - K + M)^{\mathrm{T}}P + P(A - K + M) \leqslant 0$ 成立, 则式(8) 渐近稳定, 即变量 x 耦合系统(式(1) 和(7)) 同步。其中矩阵 A, K, M 如式(20) 和(21) 所示。

对于 x 耦合系统, 其误差系统矩阵为

$$A - K + M = \begin{bmatrix} -\alpha - \delta_x - \alpha k & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

选择

$$P = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \tag{23}$$

则

$$Q = \begin{bmatrix} -2\beta(\alpha + k\alpha + \delta_x) & 2\alpha\beta & 0 \\ 2\alpha\beta & -2\alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

由于

$$\begin{cases} \Delta_1 = -2\alpha\beta - 2\beta(k\alpha + \delta_x) \\ \Delta_2 = 4\alpha\beta^2(k\alpha + \delta_x) \\ \Delta_3 = 0 \end{cases} \tag{25}$$

又因为 $\alpha > 0, \beta > 0, a \leqslant k \leqslant b < 0$, 因此, 如果 $a\alpha + \delta_x > 0$, 则 $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$。由 Sylvester 条件知 $Q \leqslant 0$; 且由式(8) 知, 当 $\mathring{V} = 0$ 时 $V = 0$。因此可得到如下结论:

定理 2 如果 $a\alpha + \delta_x > 0$, 则式(8) 渐近稳定, 即 x 耦合系统(式(1) 和(7)) 同步。

例 1 选取蔡氏电路耦合系统参数如下: $\alpha = 10.00, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68, E = 1, \delta_x = 20, \delta_y = \delta_z = 0$。由于 $a\alpha + \delta_x > 0$, 由定理 2 可知式(1) 和(7) 所示的耦合蔡氏电路同步。

蔡氏耦合电路同步信号的李萨育图形如图 1 所示, 同步信号的误差曲线如图 2 所示。

4 结 论

本文采用 Lyapunov 稳定性理论, 研究了一类混沌系统单向耦合同步设计方法, 给出了这类混沌系统耦合同步的统一条件, 并应用于蔡氏电路。本文

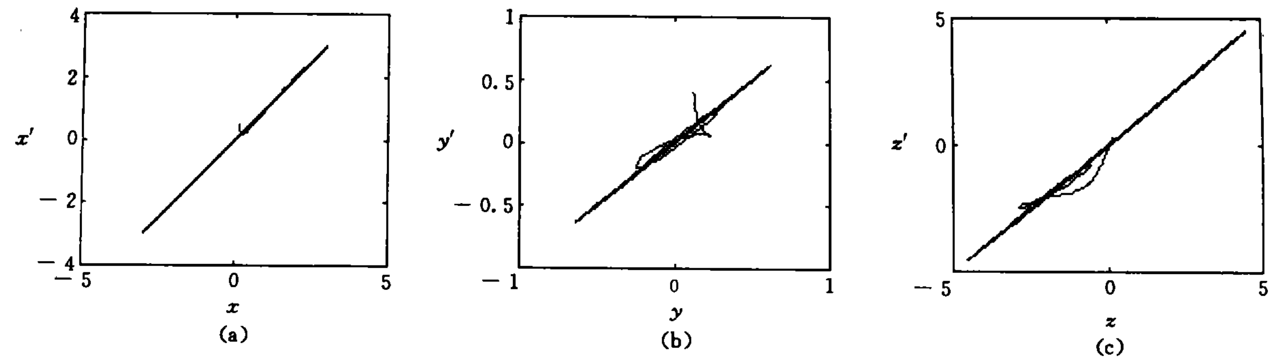

图 1　蔡氏耦合电路同步信号的李萨育图形

(a)　x, x' 波形　　(b)　y, y' 波形　　(c)　z, z' 波形

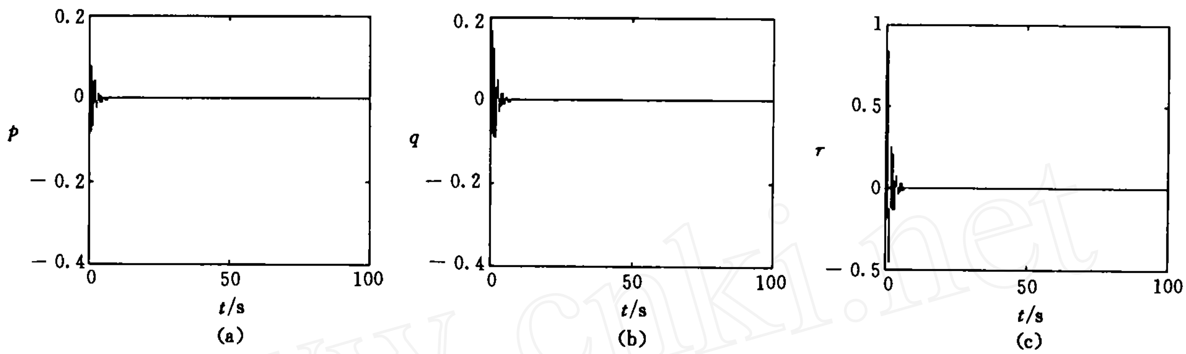

图 2　同步信号误差曲线

(a)　$p = x - x'$　　(b)　$q = y - y'$　　(c)　$r = z - z'$

的方法适用于 Chua 电路和 MLC 电路等非线性项满足分段线性函数的一类混沌系统的同步问题, 解决了用线性系统稳定性理论分析混沌同步条件存在的缺陷。

参考文献:

[1] Hays S, Grebogi C, Ott E. Communicating with chaos [J]. Phys Rev Lett, 1993, 70: 3031-3034.

[2] Wu C W, Chua L O. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems [J]. Int J Bif and Chaos [J]. 1993, 3(6): 1619-1627.

[3] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic circuits [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.

[4] Pecora L M, Carroll T L. Driving systems with chaotic signals [J]. Phys Rev A, 1991, 44(4): 2374-2378.

[5] Ogorzalek M. Taming chaos- Part 1: Synchronization [J]. IEEE Trans Circ and Syst, 1993, 40(10): 693-699.

[6] Wu C W, Chua L O. Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems [J]. IEEE Trans Circ and Syst, 1995, 42(8): 430-447.

[7] Chua L O, Itoh M, Kocarev L *et al*. Chaos synchronization in Chua's circuits [J]. J of Circ Syst and Comp, 1993, 3(1): 93-108.

[8] Murali K, Lakshmanan M. Synchronization through compound chaotic signal in Chua's circuit and Murali-lakshmanan-Chua circuit [J]. Int J Bif and Chaos, 1997, 7(2): 415-421.

[9] Wu C W, Yang T, Chua L O. On adaptive synchronization and control of nonlinear dynamical systems [J]. Int J Bif and Chaos, 1996, 6(3): 455-461.

[10] Matsumoto T. A chaotic attractor from Chua's circuit [J]. IEEE Trans Circ and Syst, 1984, 31: 1055-1058.

[11] Chua L O. The genesis of Chua's circuit [J]. Int J Electr Comm, 1992, 46: 250-257.