第16卷 第6期 控 制 与 决 策 2001年11月
Vol. 16 No. 6 CONTROL AND DECISION Nov. 2001

文章编号: 1001-0920(2001)06-0906-04

一类指数型变量均值的Bayes递进修正估计

熊海林, 沈永福, 邓方林, 陈 坚
(第二炮兵工程学院301教研室, 陕西 西安 710025)

摘 要: 基于统计决策理论, 给出一种借助先验分布求解一类只有不完全样本的指数型变量均值的Bayes递进修正估计方法, 并证明了该方法是最佳的。这是一种动态离散数据融合方法, 能够根据观测样本的不断增加而随时修正估计结果。该方法在预估服役中的导弹武器性能方面具有重要的实用价值。

关键词: 指数分布; Bayes估计; 不完全样本; 均值; 逆Gamma分布
中图分类号: O 212 文献标识码: A

Step-by-step Modifying Bayesian Estimation of Expectation of Exponential Random Variable

XIONG Hai-lin, SHEN Yong-fu, DENG Fang-lin, CHEN Jian
(Sector 301, The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China)

Abstract: A method to estimate the expectation of exponential random variable which only has imperfection samples is presented based on Bayesian statistics decision theory. This method is a fusion method of dynamic discrete data. It can correct the estimated result step-by-step according to a new-got sample. And this estimation method has great importance in forecasting missile performance in escuaging.

Key words: exponential distribution; Bayesian estimation; imperfection samples; expectation; inverse Gamma distribution

1 引 言

在工程技术中, 有许多随机现象可用指数分布规律来描述, 有的学者将指数分布称为寿命型分布。在实际应用指数型随机变量时, 有一种较为特殊的情况值得研究: 例如, 同时对 n 台电子器件做寿命试验, 在观测到 $r(r < n)$ 台器件失效时, 就需要估计这批器件的平均寿命。实际上这是一种定数截尾试验, 此时从 n 个试验样本中只得到了 r 个样本数据, 是不完全的, 本文称之为"不完全样本"。这种情况在现役武器的性能评估中很常见, 但研究的人并不多。针对这种情况, 本文结合已有的先验信息, 利用Bayes统计决策方法研究了只有不完全样本信息的指数型随机变量的均值估计方法, 给出一种递进修正算法, 并证明这种方法是均值的最佳估计。

Bayes方法起源于英国学者Bayes的一篇文章"论有关机遇问题的求解", 此文提出了著名的Bayes公式和一种归纳推理的方法。之后, 一些统计学家将其发展成为一种系统的统计推断方法。Bayes

收稿日期: 2000-06-02; 修回日期: 2001-05-15
作者简介: 熊海林(1965—), 男, 湖北钟祥人, 博士, 从事导弹控制系统的设计与仿真研究; 邓方林(1937—), 男, 陕西商洛人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与系统仿真研究。

统计方法则把先验信息与样本信息结合起来用于推断之中, 形成非决策的 Bayes 统计, 若再用后验信息, 便形成Bayes统计决策[1,2]。Bayes 统计决策方法实际上是一种采用风险评价体系的信息融合方法, 它将先验信息与后验信息进行融合得到新的结果, 国内外有许多学者在此方面都作过研究[3,4]。本文正是这一思想在指数分布型变量研究中的应用。

2 Bayes 估计[5]

为便于讨论, 首先给出几个概念。

定义 1　损失函数 $L(\theta,\delta)$ 是定义在参数空间 Θ 和决策空间 Δ 上的二元函数, 它表示当参数处于状态 θ 时, 采取行动 δ 所引起的损失。损失函数有多种。

定义 2　在一个统计决策问题中, 从样本空间 $(\mathscr{X},\mathscr{B})$ 到行动空间 $(\Delta,\mathscr{B}_\Delta)$ 的可测映射 $\delta(X)$ 称为(非随机) 决策函数。决策函数常为一个关系式。

定义 3　设 $\delta(X)$ 是一个统计决策问题中的决策函数, 那么损失函数 $L(\theta,\delta(X))$ 关于样本 X 的分布 $F_\theta(X)$ 的数学期望

$$R(\theta,\delta)=\mathrm{E}_{X|\theta}[L(\theta,\delta(X))]=\int_{\mathscr{X}}L(\theta,\delta(X))\,\mathrm{d}F_\theta(X)\qquad(1)$$

称为决策函数 $\delta(X)$ 的风险函数, 简称风险。

定义 4　设 $\mathscr{D}=\{\delta(X)\}$ 是一切可以定义在 $(\mathscr{X},\mathscr{B})$ 上而在 $(\Delta,\mathscr{B}_\Delta)$ 上取值的决策函数的全体, 假如在决策函数类 $\mathscr{D}$ 中存在这样一个决策函数 $\delta^*(X)$, 使得对任一个 $\delta(X)\in\mathscr{D}$ 皆有

$$R(\theta,\delta^*)\le R(\theta,\delta),\quad\forall\,\theta\in\Theta\qquad(2)$$

则称 $\delta^*(X)$ 为 $\mathscr{D}$ 中一致最小风险决策函数, 或称一致最优决策函数。

若待估计参数 $\theta\in\Theta$ 的先验密度函数为 $\pi(\theta)$, 决策函数为 $\delta(t)$, 其风险为 $R(\theta,\delta(t))$, 则 $\delta(t)$ 的 Bayes 风险为 $R_\pi(\delta)=\mathrm{E}[R(\theta,\delta)]$。假如在决策函数类 $\mathscr{D}$ 中存在这样的决策函数 $\delta_1^*(t)$, 使得 $R_\pi(\delta_1^*)=\inf R_\pi(\delta)$, 则称 $\delta_1^*(t)$ 为决策函数类 $\mathscr{D}$ 在 Bayes 准则下的最优估计, 简称 Bayes 估计。当得到样本 T 的观测值 t 后, θ 的后验密度函数记为 $\pi(\theta|t)$, 设 $L(\theta,\delta(t))$ 为 $\delta(t)$ 的损失函数, 则后验风险 $R_\pi(\delta|t)=\mathrm{E}_{\theta|t}[L(\theta,\delta(t))]$。若在决策函数类 $\mathscr{D}$ 中存在这样的决策函数 $\delta_2^*(t)$, 满足 $R_\pi(\delta_2^*|t)=\inf R_\pi(\delta|t)$, 则称 $\delta_2^*(t)$ 为后验风险准则下的 Bayes(后验型) 估计。

结论 1　对给定的统计决策问题(包括先验分布的给定), 当 Bayes 风险在决策函数类 $\mathscr{D}$ 中满足条件: $\inf R_\pi(\delta|t)<\infty$, 则 Bayes 估计 $\delta_1^*(t)$ 与 Bayes(后验型) 估计 $\delta_2^*(t)$ 是等价的, 即: 使后验风险最小的估计 $\delta_2^*(t)$ 同时也使Bayes风险最小, 反之亦然。

结论 2　若密度函数 $\pi(\theta)$ 为分布族 Π 中 θ 的共轭先验分布, 则后验分布 $\pi(\theta|t)$ 仍在分布族 Π 中。

3 先验分布和后验分布

3.1 先验分布

当寿命型随机变量 T 服从指数分布时, 其密度函数为

$$p(t|\theta)=\theta^{-1}\mathrm{e}^{-t/\theta},\quad t>0\qquad(3)$$

其中 θ 是 T 的均值。设在某一时刻已观测到 r 个样本, 其观测值分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_r$, 这样就获得了截尾样本: $t_1\le t_2\le\cdots\le t_r$, 记 $\boldsymbol{t}_r=(t_1,t_2,\cdots,t_r)$, 此样本的联合密度函数为

$$p(\boldsymbol{t}_r|\theta)\propto\prod_{i=1}^{r}(\theta^{-1}\mathrm{e}^{-t_i/\theta})=\theta^{-r}\exp\{-\theta^{-1}T_r\}\qquad(4)$$

其中

$$T_r=\sum_{i=1}^{r}t_i\qquad(5)$$

寻求均值 θ 的 Bayes 估计, 首先要确定 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$。据国内外相关研究表明, 对于寿命型随机变量 T 的均值 θ 而言, 选用逆 Gamma 分布 $\mathrm{IG}(\alpha,\lambda)$ 作为其先验分布是恰当的[5~7], 其密度函数为

$$\pi(\theta)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{-(\alpha+1)}\exp\{-\lambda/\theta\},\quad\theta>0\qquad(6)$$

其中, $\alpha>0$, $\lambda>0$ 是两个待定参数, 当 $\Theta=(0,+\infty)$ 时 θ 的均值为

$$\mathrm{E}[\theta]=\int_\Theta\theta\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\lambda/(\alpha-1)\qquad(7)$$

3.2 后验分布

把先验分布 $\pi(\theta)$ 与样本密度 $p(\boldsymbol{t}_r|\theta)$ 相乘, 可得后验分布的核为

$$\pi(\theta|\boldsymbol{t}_r)\propto p(\boldsymbol{t}_r|\theta)\pi(\theta)\propto\theta^{-(\alpha+r+1)}\exp\{-\theta^{-1}(\lambda+T_r)\}\qquad(8)$$

这仍然是逆 Gamma 分布的核。由于逆 Gamma 分布是共轭分布, 其后验分布仍然是逆 Gamma 分布(见结论 2), 故后验分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{t}_r)$ 是 $\mathrm{IG}(\alpha+r,\lambda+T_r)$, 即

$$\pi(\theta|\boldsymbol{t}_r)=\frac{(\lambda+T_r)^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha+r)}\theta^{-(\alpha+r+1)}\exp\{-\theta^{-1}(\lambda+T_r)\}\qquad(9)$$

4 均值的 Bayes 递进修正估计

4.1 基于不完全样本的 Bayes 估计

取平方损失函数 $L(\theta,\delta)=(\theta-\delta)^2$，则后验风险为

$$R_\pi(\delta|t)=E_{\theta|t}[L(\theta,\delta)]=\delta^2-2\delta E[\theta]+E[\theta^2] \tag{10}$$

上式对 δ 求导可得使风险 $R_\pi(\delta|t)$ 最小的 Bayes 估计为 $\delta^*=E[\theta]$（见结论 1）。可见，θ 的 Bayes 估计即为 θ 的均值。

若基于不完全样本，θ 的 Bayes 估计又如何呢？在实际应用中，一般是对 n 件仪器同时做寿命试验，当观测到 r 件仪器失效时，对这 r 个定数截尾的样本进行均值估计。如果只用前 r 个样本的数据，估计值就会明显偏小。考虑到 t 服从指数分布，为了补偿，将第 $r+1$ 到第 n 个样本赋予以第 r 个样本观测值为基础的递增序列，递增量可采用最后三个观测值的平均差，即当 $i=1,2,\cdots,n-r$ 时

$$t_{r+i}=t_r+i\Delta,\quad \Delta=(t_r-t_{r-2})/2,\quad r>2 \tag{11}$$

同时将式(9)中的 r 换成 n，更接近实际情况，于是便得到了更准确的 Bayes 估计

$$\theta_r^{Bay}=E_{\theta|t}[\theta]=\int_\Theta\theta\pi(\theta|\boldsymbol{t}_r)\,d\theta=\frac{\lambda+T_r'}{\alpha+n-1} \tag{12}$$

$$T_r'=T_r+(n-r)t_r+\frac{1}{2}(n-r+1)(n-r)\Delta \tag{13}$$

4.2 估计的递进修正

当 n 个样本进行试验只得到前 r 个样本值时，根据先验密度函数 $\pi(\theta)$ 计算出的后验密度函数为 $\pi(\theta|\boldsymbol{t}_r)$，计算出 θ 的 Bayes 估计值为 θ_r^{Bay}。当又得到一个样本，即得到第 $r+1$ 个样本时，则需根据新的数据对 θ 的原估计值 θ_r^{Bay} 进行修正，或重新计算均值的估计值 θ_{r+1}^{Bay}。计算方法有两种：1）用新观测（或是增补后的）样本 $\boldsymbol{t}_{r+1}=(t_1,\cdots,t_r,t_{r+1})$ 代替 $\boldsymbol{t}_r$，求得新的后验密度 $\pi(\theta|\boldsymbol{t}_{r+1})$，再求均值 θ_{r+1}^{Bay}；2）将 $\pi(\theta|\boldsymbol{t}_r)$ 作为先验密度函数，结合样本密度式(1)来求新的后验密度函数 $\pi(\theta|\boldsymbol{t}_{r+1})$，进而求得 θ_{r+1}^{Bay}，即

$$\pi(\theta|\boldsymbol{t}_r)\oplus p(\boldsymbol{t}_{r+1}|\theta)\Rightarrow\pi(\theta|\boldsymbol{t}_{r+1})\Rightarrow\theta_{r+1}^{Bay} \tag{14}$$

这两种方法所得的结果是一样的。下面采用第一种方法，即仍以 $\pi(\theta)$ 作为先验密度来推导 $\pi(\theta|\boldsymbol{t}_{r+1})$。

将式(9)中的 T_r 换成 T_{r+1}'，r 换成 n，立即可得

$$\pi(\theta|\boldsymbol{t}_{r+1})=\frac{(\lambda+T_{r+1}')^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)}\theta^{-(\alpha+n+1)}e^{-(\lambda+T_{r+1}')/\theta} \tag{15}$$

$$T_{r+1}'=T_{r+1}+(n-r-1)t_{r+1}+\frac{1}{2}(n-r-1)(n-r)\Delta \tag{16}$$

此时，均值 θ 的 Bayes 估计为

$$\theta_{r+1}^{Bay}=\int_\Theta\theta\pi(\theta|\boldsymbol{t}_{r+1})\,d\theta=\frac{\lambda+T_{r+1}'}{\alpha+n-1}=\frac{\lambda+T_{r+1}'}{\lambda+T_r'}\theta_r^{Bay} \tag{17}$$

这就是指数型随机变量均值的递进修正公式，也是一种递推估计公式。

5 Bayes 估计的有效性

为了将 Bayes 估计与常规估计作以比较，下面给出 θ 的矩估计

$$\hat{\theta}_r=n^{-1}\sum_{i=1}^n t_i=T_r'/n \tag{18}$$

容易证明 θ 的极大似然估计也为 $\hat{\theta}_r$。对于 Bayes 估计，一般不用有偏性来恒量，而对于不完全样本，其矩估计和极大似然估计也不宜讨论有偏性。但当 $r=n,n\to\infty$ 时，从式(12)和(18)可以看出，θ_r^{Bay} 和 $\hat{\theta}_r$ 是一致的，都等于 θ，这说明在极限情况下，θ_r^{Bay} 和 $\hat{\theta}_r$ 都是无偏的。基于这一点，下面分析这几种估计的方差（有效性）。

$\hat{\theta}_r$ 的方差为

$$D(\hat{\theta}_r)=D(T_r'/n) \tag{19}$$

因为 $\alpha>1$，故 θ_r^{Bay} 的方差

$$D(\theta_r^{Bay})=D\left(\frac{\lambda+T_r'}{n+\alpha-1}\right)=D\left(\frac{T_r'}{n+\alpha-1}\right)<D\left(\frac{T_r'}{n}\right)=D(\hat{\theta}_r) \tag{20}$$

因而 θ_r^{Bay} 优于 $\hat{\theta}_r$，或 θ_r^{Bay} 比 $\hat{\theta}_r$ 有效。在这几种估计中，Bayes 估计是最佳的。

6 计算示例

某导弹无线电引信的寿命 t 服从指数分布，现求一批引信的平均寿命。这批引信共有 $n=10$ 台，厂商给出的平均寿命约为 550 h（累计工作时间），其 0.1 分位点约为 220 h，将数据代入式(5)和(6)中得到方程组

$$\lambda/(\alpha-1)=550,\quad \int_0^{220}\pi(\theta)\,d\theta=0.1 \tag{21}$$

利用数值法解得 $\alpha=3.288,\lambda=1\,258$。

当有 6 台引信先后失效后（$r=6$，数据参见表

表 1　示例计算

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7^*	T'_r	T'_{r+1}	θ_r^{Bay}	θ_{r+1}^{Bay}	$\hat{\theta}_r$	$\hat{\theta}_{r+1}$
224	303	312	399	415	477	481	4 428	4 252	462.7	448.4	442.8	425.2

1), 对这批引信的平均寿命进行 Bayes 估计, 计算 T'_r 和 θ_r^{Bay}; 当第 7 台引信失效时, 再计算 T'_{r+1} 和 θ_{r+1}^{Bay}。这样每得到一个新的值, 便可立即对 θ 的估计值 θ_r^{Bay} 进行递推修正, 同时计算 $\hat{\theta}_r$ 和 $\hat{\theta}_{r+1}$ 并作对比。

7　结　　语

Bayes 方法利用先验信息来估计参数的后验值, 即使样本不完全, 也可以得到较好的结果, 还可以利用新的样本值进行递进修正。本文介绍了这一方法, 并给出了方便的递推算法, 使估计的结果不断得到递进修正, 大大提高了精度。这一方法对于处理导弹这类小样本事件可以得到广泛应用。

参考文献:

[1] Christian P R. The Bayesian choice——A decision theoretic motivation[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.

[2] 张金槐. 多种验前信息源情况下的融合验后分布[J]. 飞行器测控技术, 1998, 17(3): 28-36.

[3] Hoballab I Y, Varshney P K. Distributed Bayesian signal detection[J]. IEEE Trans on Infor Theory, 1989, 35: 232-236.

[4] Wojciech Pieczynski. Pairwise Markov chains and Bayesian unsupervised fusion[A]. Proc of 3rd Int Conf on Information Fusion[C]. Paris, 2000.

[5] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

[6] Gelman A, Carlin J B. Bayesian data analysis[M]. New York: Chapman-Hall, 1995.

[7] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993.

本刊 2000 年第 5, 6 期有 22 篇文章被 EI 检索

本刊讯　据美国工程信息公司中国信息部提供的消息, 《控制与决策》2000 年第 5 期和第 6 期共有 22 篇文章被 EI 检索。被检索的作者及文题如下:

第 5 期:
王耀青(武汉科技大学): LQ 最优控制系统加权矩阵 Q 的一种数值算法
于之训等(同济大学): 具有随机通讯延迟和噪声干扰的网络系统控制
殷　铭等(东南大学): 基于模糊神经网络的发酵过程溶解氧预估控制
胡中骥等(上海交通大学): 基于广义无源的输入非仿射系统的 H^∞ 控制律设计
原忠虎等(沈阳大学): 不确定离散广义系统因果性的鲁棒控制
黄　蕊等(东北大学): 带有非线性不确定参数的线性系统的鲁棒稳定性和鲁棒镇定问题
张山鹰等(西北工业大学): 一种新的证据推理组合规则
韩崇昭等(西安交通大学): 非线性控制系统综合的频域逆系统方法研究

第 6 期:
孙　衢等(西安交通大学): 一种鲁棒稳定的自适应模糊控制系统的设计
李　涛等(清华大学): 变加权系数减小变结构系统抖振的设计方法
张　涛等(东北大学): 基于 MTO 管理系统的钢厂合同计划方法
李　岩等(上海交通大学): 基于 GA 和 SA 的制造单元成组方法
王宏伦等(南京航空航天大学): 基于遗传算法的自学习模糊逻辑系统
凌　强等(清华大学): 一种用于感应电机的鲁棒变结构观测器
郑　伟等(哈尔滨工业大学): 一类定性定量综合集成推理的模糊控制算法设计
翟长连等(上海交通大学): 基于不变集的一类混合系统的稳定性
李少远等(上海交通大学): 基于模糊目标和模糊约束的满意控制
魏永德(辽宁大学): 一类非线性不确定组合系统基于观测器的鲁棒分散镇定
黄　敏等(东北大学): 多阶段 CONWIP 系统流通卡分布的确定方法
陈启军等(同济大学): 全局指数收敛的机器人 PD 自适应轨迹跟踪
王　勇等(北京航空航天大学): 时变调参控制系统的稳定裕度
黄　薇等(重庆大学): 存贷利率不等下具有随机跳跃收入的消费与投资策略