文章编号: 1001-0920(2001)06-0934-03

广义周期时变离散控制系统的分散控制技术

苏晓明[1], 张庆灵[2]
(1. 沈阳工业大学 理学院, 辽宁 沈阳 110023; 2. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 利用分散控制技术建立广义时变周期(PTV)系统与线性时不变(LTI)系统的等价关系,并利用该等价关系刻画了广义 PTV 系统的因果性关系和闭环系统的等价性,从而为研究广义 PTV 系统打下良好的基础。

关键词: 分散控制; 广义 PTV 系统; 广义 LTI 系统
中图分类号: TP 13　　文献标识码: A

Decentralized Control Techniques in Singular Periodically Time Varying Discrete-time Control Systems

SU Xiao-ming[1], ZHANG Qing-ling[2]
(1. College of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China;
2. College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: Through decentralized control techniques, the equivalent relationship is established between singular PTV system and LTI system. The causality and closed-loop equivalence of singular PTV system are described with the equivalent relationship. Thereby it lays a certain foundation for studying singular PTV system.

Key words: decentralized control; singular PTV system; singular LTI system

1 引　　言

对于广义时不变线性系统,目前已拥有一套相当完整的理论[1,2],但对于广义时变系统的研究则很不完善。在过去的 10 年里,人们做了一些尝试: Campell 等[3]通过一个解析的坐标变换,将解析可解的线性广义时变系统化为规范标准型; Campell 等[4,5]和 Terrell[6]研究了广义时变系统的可观性和可控性。近年来,人们正在寻求一种突破,试图建立 PTV 系统与 LTI 系统的等价关系,并利用 LTI 系统来处理 PTV 系统。Yan 等[7]建立了与正常 PTV 系统等价的 LTI 系统,并利用等价性讨论了 PTV 系统的稳定性和可控性等问题。本文则利用分散控制技术[8]建立了广义 PTV 系统与广义 LTI 系统解的等价性,并讨论了广义 PTV 系统的因果性和稳定性等问题。

广义 PTV 系统在实际中有着广泛的应用。它可以描述生物科学中的进化现象[9];利用其可解性可以预测将来某一时间内经济的增长趋势[9];它的脉冲性反映了电力、电子的某一重要特征[8]。此外, PTV 数字过滤器的建立可以解决很多机械工程方面的问题。

收稿日期: 2000-07-28; 修回日期: 2000-12-19
基金项目: 辽宁省教委基金项目(990521040)
作者简介: 苏晓明(1964—),男,辽宁北票人,副教授,博士生,从事广义时变系统的控制理论与控制工程等研究;张庆灵(1956—),男,辽宁营口人,教授,博士生导师,从事分散控制与鲁棒控制等研究。

2 系统描述与定义

考虑如下广义周期时变离散系统

$$
\begin{aligned}
&E(t)x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
&y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad t \in Z
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中, $x(t) \in R^n$ 是状态向量, $u(t) \in R^m$ 是输入向量, $y(t) \in R^r$ 是输出向量, $E(t), A(t), B(t), C(t), D(t)$ 是 T - 周期矩阵, 即

$$
\begin{aligned}
&E(t+T) = E(t), \quad A(t+T) = A(t) \\
&B(t+T) = B(t), \quad C(t+T) = C(t) \\
&D(t+T) = D(t), \quad \forall t \in Z
\end{aligned} \tag{2}
$$

定义 1　系统(1) 称为解析可解的, 如果对于任意给定的充分光滑函数 $B(t)u(t)$, 系统的解 $x(t)$ 存在, 并且当解 $x(t)$ 存在时, 它们被初始状态 x_0 所唯一确定。

定义 2　若系统(1) 可化为如下形式

$$
\begin{aligned}
&x_1(t+1) = A_1(t)x_1(t) + B_1(t)u(t) \\
&y_1(t) = C_1(t)x_1(t) + D_1(t)u(t)
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&N(t)x_2(t+1) = x_2(t) + B_2(t)u(t) \\
&y_2(t) = C_2(t)x_2(t) + D_2(t)u(t)
\end{aligned} \tag{4}
$$

这里, $N(t)$ 是幂零矩阵且是上(下) 三解矩阵, 则系统(3), (4) 被称为系统(1) 的规范标准型。

定理 1[4]　若 $E(t), A(t)$ 是解析的, 并且系统(1) 是解析可解的, 则系统(1) 可化为规范标准型。

定义 3　系统(1) 称为渐近稳定的, 如果它的子系统(3) 是渐近稳定的。

定义 4　对于子系统(3), 我们称矩阵 $A_1(T)$, $A_1(T-1), \cdots, A_1(1), A_1(0)$ 的乘积

$$\Psi = A_1(T)A_1(T-1)\cdots A_1(1)A_1(0)$$

为系统的单值矩阵。

显然, 系统(3) 的渐近性和瞬时性是由其单值矩阵的特征值所确定的。系统(1) 渐近稳定的充要条件是 Ψ 的特征值在单位开圆内。

定义 5　系统(1) 在某一时刻 k 被称为具有状态因果性, 如果它的状态 $x(k)$ 完全被初始条件 x_0 和输入 $u(0), u(1), \cdots, u(k)$ 所决定; 否则, 它被称为具有非因果性。若系统(1) 在任一时刻均具有状态因果性, 则称系统(1) 具有状态因果性。

显然, 系统(1) 具有状态因果性的充分必要条件为对于任一时刻 $t(0 \le t \le T-1)$ 子系统(4) 中的 $N(t) = 0$。

3 等价的 LTI 系统

考虑下述系统

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_1(t+1) = \bar{A}_1(T)\bar{x}_1(t) + \bar{B}_1(T)U(t) \\
&Y_1(t) = \bar{C}_1(T)\bar{x}_1(t) + \bar{D}_1(T)U(t)
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{N}(T)\bar{x}_2(t+1) = \bar{x}_2(t) + \bar{B}_2(T)U(t) \\
&Y_2(t) = \bar{C}_2(T)\bar{x}_1(t) + \bar{D}_2(T)U(t)
\end{aligned} \tag{6}
$$

其中

$$\bar{A}_1(T) = A_1(T-1)A_1(T-2)\cdots A_1(1)A_1(0) \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{B}_k(T) = [&A_k(T-1)\cdots A_k(1)B_k(0), A_k(T-1) \\
&\cdots A_k(2)B_k(1), \cdots, B_k(T-1)]
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{C}_k(T) = [&C_k(0) / C_k(1)A_k(0) / C_k(2)A_k(1)A_k(0) / \\
&\cdots / C_k(T-1)A_k(T-2)\cdots A_k(0)]
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$\bar{D}_k(T) = (\bar{D}_{kij})_{T \times T} \tag{10}$$

这里

$$
\bar{D}_{kij} = \begin{cases}
0, & i < j \\
D_k(i-1), & i = j \\
C_k(i-1)B_k(j-1), & i = j+1 \\
C_k(i-1)A_k(i-2)\cdots & \\
\quad A_k(j)B_k(j-1), & i > j+1 \\
\quad k = 1, 2 &
\end{cases} \tag{11}
$$

$$\bar{N}(T) = N(T-1)N(T-2)\cdots N(1)N(0) \tag{12}$$

而 $\bar{B}_2(T), \bar{C}_2(T), \bar{D}_2(T)$ 分别是将 $\bar{B}_k(T), \bar{C}_k(T), \bar{D}_k(T)$ 中的 $k = 2, A_k = N$ 得到的。令

$$\bar{x}_1(t) = x_1(tT), \quad \bar{x}_2(t) = x_2(tT)$$

$$U(t) = [u(tT) / u(tT+1) / \cdots / u(tT+T-1)]$$

$$Y_1(t) = [y_1(tT) / y_1(tT+1) / \cdots / y_1(tT+T-1)]$$

$$Y_2(t) = [y_2(tT) / y_2(tT+1) / \cdots / y_2(tT+T-1)]$$

若 $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)$ 分别表示子系统(5) 和(6) 的状态, $U(t)$ 分别表示子系统(5) 和(6) 的输入, $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ 分别表示子系统(5) 和(6) 的输出, 则利用分散控制技术可以得到下述结论:

定理 2　在开环意义下, 子系统(3) 的解与子系统(5) 的解是等价的; 子系统(4) 的解与子系统(6) 的解是等价的。

证明　先证子系统(3) 与子系统(5) 的等价性。将系统(5) 写成分散控制系统形式

$$
\begin{cases}
x_1[(t+1)T] = \bar{A}_1(T)x_1(tT) + \sum_{i=1}^{T} \bar{G}_i U_i(t) \\
y_1(tT+i) = \bar{H}_{i+1}\bar{x}_1(t) + \sum_{j=1}^{T} \bar{D}_{1ij} U_j(t) \\
\qquad i = 0, 1, \cdots, T-1
\end{cases} \tag{13}
$$

其中　$\bar{G}_i = A_1(T-1)\cdots A_1(i)B_1(i-1)$

$\bar{G}_T = B_1(T-1), \quad \bar{H}_1 = C_1(0)$

$\bar{H}_i = C_1(i-1)A_1(i-2)\cdots A_1(0), \quad 2 \le i \le T$

$U_i(t) = u(tT+i), \quad i = 0, 1, \cdots, T-1$

这样, 对于 $\forall t \in Z$, 有 $t = t_1 + i, t_1 \in Z, 0 \le i \le T - 1$, 从而由系统(13) 可以看出, 子系统(3) 与系统(13) 是等价的, 当然子系统(3) 与系统(5) 也是等价的。同理, 利用分散控制技术可以证明子系统(4) 与系统(6) 也是等价的。(证毕)

定理 3 若广义 PTV 系统(1) 具有状态因果性, 则等价的 LTI 系统(5) 和(6) 具有因果性。

证明 假设系统(1) 具有状态因果性, 则对于任意的 $k(0 \le k \le T - 1)$ 有系统(4) 中的 $N(k) = 0$, 从而系统(6) 中的 $\bar{N}(T) = 0$, 因此系统(5) 和(6) 具有因果性。(证毕)

4 闭环系统等价性

为了研究广义 PTV 系统的因果性和稳定性, 对系统(1) 作周期输出反馈

$$u(t) = K(t)y(t) + v(t), \quad t \in Z \tag{14}$$

所得的闭环系统为

$$\begin{aligned} E(t)x(t+1) &= A(K)x(t) + B(K)v(t) \\ Y(t) &= C(K)x(t) + D(K)v(t) \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $K(t)$ 是 T-周期反馈矩阵,

$$A(K) = A(t) + B(t)K(t)[I - D(t)K(t)]^{-1}$$

$$B(K) = B(t) + B(t)\{K(t)[I - D(t)K(t)]^{-1}\}$$

$$C(K) = [I - D(t)K(t)]^{-1}C(t)$$

$$D(K) = K(t)[I - D(t)K(t)]^{-1}D(t)$$

由定理 1 知, 可将系统(15) 化为

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= A_1(K)x_1(t) + B_1(K)v(t) \\ y_1(t) &= C_1(K)x_1(t) + D_1(K)v(t) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} N(t)x_2(t+1) &= x_2(t) + B_2(K)v(t) \\ y_2(t) &= C_2(K)x_2(t) + D_2(K)v(t) \end{aligned} \tag{17}$$

$N(t)$ 是幂零矩阵, 其中各块均具有相应的阶数。相应地, 系统(16) 与(17) 分别对应如下等价系统

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t+1) &= \bar{A}_1(T)\bar{x}_1(t) + \bar{B}_1(T)U(t) \\ Y_1(t) &= \bar{C}_1(T)\bar{x}_1(t) + \bar{D}_1(T)U(t) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \bar{N}(T)\bar{x}_2(t+1) &= \bar{x}_2(t) + \bar{B}_2(T)U(t) \\ Y_2(t) &= \bar{C}_2(T)\bar{x}_1(t) + \bar{D}_2(T)U(t) \end{aligned} \tag{19}$$

其中的新变量是将系统(16) 和(17) 中的矩阵代入式(7) ～(12) 中获得的。于是问题转化为寻求 $K(i)\,(i = 0, 1, \cdots, T - 1)$, 使得闭环系统(16) 的单值矩阵的特征值在单位开圆内。

对子系统(5) 作输出反馈

$$U(T) = \bar{K}Y_1(t) + V(T) \tag{20}$$

其中

$$\bar{K} = \text{blockdiag}[k(0), k(1), \cdots, k(T - 1)]$$

$$V(T) = \text{blockdiag}[v_1(tT), v_1(tT + 1), \cdots, v_1(tT + T - 1)]$$

则

$$u(tT + i) = K(i)y_1(tT + i) = K(tT + i)y_1(tT + i) + v_1(tT + i)$$

$$i = 0, 1, \cdots, T - 1$$

显然, 式(14) 与式(20) 是等价的。从而有如下定理:

定理 4 广义 PTV 系统(15) 通过 T-周期输出反馈(14) 是稳定的, 其充分必要条件是系统(18) 通过定常的对角输出反馈是稳定的。

5 结 语

本文对广义周期时变系统进行了结构分析。通过广义 PTV 系统与广义 LTI 系统解的等价性的建立, 对广义 PTV 系统的因果性和稳定性进行了研究, 给出了广义 PTV 系统具有因果性和稳定性的条件。相信这一研究在生物工程的研究中将起着非常重要的作用。

参考文献:

[1] Campell S L. Singular system of differential equation [M]. New York: Pitman, 1980. 6-9.

[2] L Dai. Singular control systems[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1989.

[3] Campell S L, L Petzold. Canonical forms and solvable singular system of differential equation[J]. SIAM J Alg Discrete Math, 1983, 4(4): 517-521.

[4] Campell S L, W J Terrell. Observability and controllability for linear time-varying singular system[J]. Circuit Syst Sig Process, 1991, 10(2): 455-470.

[5] Campell S L, W J Terrell. Observability for linear time-varying descriptor system [J]. SIAM J Matrix Anal Applic, 1991, 12(4): 484-496.

[6] Terrell W J. The out-nulling space, projected dynamics, and system decomposition for linear time-varying singular system[J]. SIAM J Control Optim, 1994, 32(3): 876-889.

[7] Wei-Yong Yan, Robert R Bitmead. Decentralized control techniques in periodically time varying discrete-time control systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1992, 37(10): 1644-1648.

[8] 张庆灵. 广义大系统的分散控制与鲁棒控制[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1997. 1-13.

[9] Sreedhar J, Dooren P. Periodic descriptor systems: Solvability and conditionability[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1999, 44(2): 310-313.