第16卷第6期 控 制 与 决 策 2001年11月
Vol 16 No. 6 CONTROL AND DECISION Nov. 2001

文章编号: 1001-0920(2001)06-0968-03

# 变时滞不确定关联系统的分散鲁棒容错控制

孙继涛[1], 邓飞其[2], 刘永清[2]
(1. 同济大学 应用数学系, 上海 200092; 2. 华南理工大学 自动控制工程系, 广东 广州 510641)

**摘 要**: 针对一类不确定项具有数值界的变时滞不确定关联系统, 运用线性矩阵不等式(LMI)方法对其分散鲁棒容错控制问题进行研究。首先提出以一组LMIs有解作为系统可分散鲁棒容错控制的充分条件, 并给出了系统在此条件下的控制律, 它对执行器发生故障时具有完整性; 然后求解一个具有LMIs约束的凸优化问题, 作为设计具有尽可能小反馈增益的分散鲁棒容错控制律的系统化方法, 从而得到更符合实际的满意的分散容错控制律。

**关键词**: 分散控制; 鲁棒控制; 容错控制; 执行器失效; 完整性
**中图分类号**: TP202 **文献标识码**: A

# Decentralized Falt-tolerant Robust Control for Uncertain Interconnected Systems with Time-varying Delays

*SUN Ji-tao*[1], *DENG Fei-qi*[2], *LIU Yong-qing*[2]
(1. Department of Applied Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

**Abstract**: The decentralized fault-tolerant robust stabilization problem for large-scale uncertain interconnected systems with time varying delays is studied by using linear matrix inequality (LMI) approach. The uncertainty in the system is value bounded. Sufficient conditions for existence of decentralized falt-tolerant robust stabilization are presented. Based on these conditions, the controller is presented in the case of actuator failures. By solving a convex optimization problem with LMIs constraints, the systematic methods for decentralized controllers with small feedback gain are presented.

**Key words**: decentralized control; robust control; fault-tolerant control; actuator failures; integrity

## 1 引 言

由于以下原因, 对变时滞不确定关联系统的分散鲁棒容错控制问题的研究在理论上和实际中都有重大意义[1~9]: 1) 关联大系统的分散鲁棒控制[1] 不仅可从理论上简化复杂问题, 而且实现起来也经济、可靠。2) 在实际大系统中, 由于环境变化等因素引起的不确定项往往具有数值界的表达形式, 可表达为 $|\Delta| \prec E$, 即矩阵$\Delta$中的每个元素的绝对值小于$E$中的相应元素, 其中$E$为非负矩阵。这种表达形式不需要满足匹配条件, 因而更具实际意义和一般性。3) 在实际系统中, 由于惯性等因素的影响, 系统常含有

**收稿日期**: 2000-05-31; **修回日期**: 2000-10-11
**基金项目**: 国家自然科学基金重点项目(69934030); 高等学校骨干教师资助计划项目
**作者简介**: 孙继涛(1963—), 男, 江苏张家港人, 教授, 从事时滞系统、鲁棒控制等研究; 刘永清(1932—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士生导师, 从事大系统和时滞系统的研究。

时滞, 且往往为变时滞; 另外, 传感器或执行器发生故障也是不可避免的。

LMI方法以其求解的高效性而成为鲁棒分析与设计的一种重要工具。本文运用LMI方法研究一类不确定项具有数值界的变时滞不确定关联系统的分散鲁棒容错控制问题, 得到的结果同时对执行器发生故障时具有完整性。首先给出了大系统可分散容错控制的一个充分条件; 然后提出一种使反馈增益尽可能小的分散鲁棒容错控制律的设计方法。

## 2　问题描述与引理

考虑一类由$N$ 个子系统构成的变时滞不确定关联系统

$$\mathring{x}_i(t) = [A_i + \Delta A_i(\omega)]x_i(t) + [B_i + \Delta B_i(s_i)]u_i(t) + \sum_{j=1}^{N}[A_{ij} + \Delta A_{ij}(\gamma_{ij})]x_j[t - \tau_{ij}(t)] \quad (1)$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, N$ ; $x_i(t) \in R^{n_i}$ 和 $u_i(t) \in R^{m_i}$ 分别为状态向量和控制向量; $A_i, B_i, A_{ij}$ 代表标称系统, 且有适当的维数, $(A_i, B_i)$ 是可控的, $A_{ij}$ 为互联矩阵; $\Delta A_{ij}, \Delta A_i, \Delta B_i$ 为时变不确定项, 它们有如下数值界

$$|\Delta A_i| \prec C_i, \quad |\Delta A_{ij}| \prec D_{ij}, \quad |\Delta B_i| \prec E_i$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, N \quad (2)$$

其中 $C_i, D_{ij}$ 和 $E_i$ 为具有非负元素的实常数矩阵, 且分别与 $\Delta A_i, \Delta A_{ij}$ 和 $\Delta B_i$ 同维。$|\Delta| \prec \bar{\Delta}$ 的含义是 $|e_{ij}| \le \bar{e}_{ij}$, $e_{ij}$ 和 $\bar{e}_{ij}$ 分别为矩阵 $\Delta$ 和 $\bar{\Delta}$ 的第 $ij$ 个对应元素。其中的不确定参数满足 $\omega \in \phi_i \subset R^{p_i}$, $s_i \in \varphi_i \subset R^{q_i}$, $\gamma_{ij} \in \theta_{ij} \subset R^{r_{ij}}$, $\phi_i, \varphi_i, \theta_{ij}$ 为有界紧集, $i, j = 1, 2, \cdots, N$ 。另外, 变时滞 $\tau_{ij}(t)$ 满足

$$\begin{cases} 0 \le \tau_{ij}(t) \le \tau < +\infty \\ 0 \le \mathring{\tau}_{ij}(t) \le h < 1 \end{cases} \quad (3)$$

与文献[2]类似, 可证如下引理:

**引理 1**　若 $n \times m$ 阶矩阵 $\Delta A$ 满足 $|\Delta A| \prec D$, 则　$\Omega(D) \ge \Delta A \Delta A^{\mathrm{T}}$,　$\Gamma(D) \ge \Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A$

式中

$$\Omega(D) = \begin{cases} \|DD^{\mathrm{T}}\| I_{n\times n}, & \|DD^{\mathrm{T}}\| I_{n\times n} < n\,\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}}) \\ n\,\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}}), & \text{其　它} \end{cases}$$

$$\Gamma(D) = \begin{cases} \|D^{\mathrm{T}}D\| I_{m\times m}, & \|D^{\mathrm{T}}D\| I_{m\times m} < m\,\mathrm{diag}(D^{\mathrm{T}}D) \\ m\,\mathrm{diag}(D^{\mathrm{T}}D), & \text{其　它} \end{cases}$$

**注 1**　引理 1 中矩阵范数 $\|M\|$ 定义为$M$ 的最大奇异值。

## 3　主要结果

**定理 1**　对于满足式(2), (3) 的变时滞不确定关联系统(1), 如果存在正定矩阵$X_i$, 矩阵$Y_i$ 以及正数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, 使如下LMI

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & X_i\Gamma(C_i)^{1/2} & Y_i^{\mathrm{T}} & Y_i^{\mathrm{T}} & X_i \\ \Gamma(C_i)^{1/2}X_i & -\alpha_i I & 0 & 0 & 0 \\ Y_i & 0 & -\beta_i I & 0 & 0 \\ Y_i & 0 & 0 & -\gamma_i I & 0 \\ X_i & 0 & 0 & 0 & \frac{h-1}{2N}I \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

成立, 则存在分散无记忆状态反馈律 $u_i(t) = Y_iX_i^{-1}x_i(t)$ 鲁棒镇定系统(1), 且对执行器失效具有完整性。其中

$$\bar{A}_i = A_iX_i + X_iA_i^{\mathrm{T}} + \alpha_i I + F_{1i} + F_{2i} + \gamma_i B_iB_i^{\mathrm{T}} + \beta_i\Omega(E_i)$$

$$F_{1i} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}}, \quad F_{2i} = \sum_{j=1}^{N}\Omega(D_{ij})$$

$$F_{3i} = \frac{2N}{1-h}I$$

**注 2**　由引理 1 知 $\Gamma(C_i)$ 为半正定或正定矩阵, 故可分解为 $\Gamma(C_i) = \Gamma(C_i)^{1/2}\Gamma(C_i)^{1/2}$, 因此式(4) 中 $\Gamma(C_i)^{1/2}$ 有意义。

**证明**　对系统(1) 采用控制律 $u_i = K_ix_i$, 设控制具有形式 $u_i(t) = K_ix_i(t)$。考虑到系统的执行器可能发生故障, 引入表示执行器故障的开关矩阵$L$, 其形式为 $L_{ij} = \mathrm{diag}(l_{i1}, l_{i2}, \cdots, l_{in_i})$, 其中

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 个执行器正常} \\ 0, & \text{第 } j \text{ 个执行器失效} \end{cases}$$

$l_{ij}$ 不全为 0。则含有执行器故障的系统模型为

$$\mathring{x}_i(t) = (A_i + \Delta A_i)x_i + (B_i + \Delta B_i)L_{ij}K_ix_i + \sum_{j=1}^{N}(A_{ij} + \Delta A_{ij})x_j(t - \tau_{ij}(t)) \quad (5)$$

考虑如下Lyapunov 函数

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\mathrm{T}}P_ix_i + \frac{2}{1-h}\sum_{j=1}^{N}\int_{\tau_{ij}(t)} x_j^{\mathrm{T}}(s)x_j(s)\,\mathrm{d}s$$

其中 $P_i$ 为正定阵, 显然$V(x(t))$ 正定。$V(x(t))$ 沿系统(5) 的轨线的时间导数为

$$\mathring{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{N}\{x_i^{\mathrm{T}}(PA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_i\Delta A_i + \Delta A_i^{\mathrm{T}}P_i +$$

$$P_iB_iL_{ij}K_i + K_i^{\mathrm{T}}L_{ij}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i + P_i\Delta B_iL_{ij}K_i + K_i^{\mathrm{T}}L_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta B_i^{\mathrm{T}}P_i)x_i + 2x_i^{\mathrm{T}}P_i\sum_{j=1}^{N}(A_{ij} + \Delta A_{ij}) \times x_j(t - \tau_{ij}(t)) + \frac{2}{1 - h}\sum_{j=1}^{N}[x_j^{\mathrm{T}}x_j - (1 - \dot{\tau}_{ij}(t))x_j^{\mathrm{T}}(t - \tau_{ij}(t))x_j(t - \tau_{ij}(t))]\} \tag{6}$$

在不等式 $X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leq \alpha X^{\mathrm{T}}X + \alpha^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y\ (\alpha > 0)$ 中, 令 $\alpha = 1$ 得

$$2\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}P_i\sum_{j=1}^{N}(A_{ij} + \Delta A_{ij})x_j(t - \tau_{ij}(t)) \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[x_i^{\mathrm{T}}P_i(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}} + \Omega(D_{ij}))P_ix_i + 2x_j^{\mathrm{T}}(t - \tau_{ij}(t))x_j(t - \tau_{ij}(t))] \tag{7}$$

由引理及不等式 $X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leq \alpha X^{\mathrm{T}}X + \alpha^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y\ (\alpha > 0)$, 可推出

$$P_i\Delta A_i + \Delta A_i^{\mathrm{T}}P_i \leq \alpha_iP_iP_i + \alpha_i^{-1}\Gamma(C_i) \tag{8}$$

$$P_i\Delta B_iL_{ij}K_i + K_i^{\mathrm{T}}L_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta B_i^{\mathrm{T}}P_i \leq \beta_iP_i\Omega(E_i)P_i + \beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}K_i \tag{9}$$

$$P_iB_iL_{ij}K_i + K_i^{\mathrm{T}}L_{ij}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i \leq \gamma_iP_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i + \gamma_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}K_i \tag{10}$$

将式(7)～(10)代入式(6), 由式(3)知

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}[P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i + \alpha_iP_iP_i + \alpha_i^{-1}\Gamma(C_i) + \gamma_iP_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i + \beta_iP_i\Omega(E_i)P_i + (\beta_i^{-1} + \gamma_i^{-1})K_i^{\mathrm{T}}K_i + P_iF_{1i}P_i + P_iF_{2i}P_i + F_{3i}]x_i$$

其中

$$F_{1i} = \sum_{j=1}^{N}(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}}),\quad F_{2i} = \sum_{j=1}^{N}\Omega(D_{ij})$$

$$F_{3i} = \frac{2N}{1 - h}I$$

由Lyapunov稳定性定理知, 如果不等式

$$P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i + \alpha_iP_iP_i + \alpha_i^{-1}\Gamma(C_i) + \gamma_iP_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i + \beta_iP_i\Omega(E_i)P_i + (\beta_i^{-1} + \gamma_i^{-1})K_i^{\mathrm{T}}K_i + P_iF_{1i}P_i + P_iF_{2i}P_i + F_{3i} < 0 \tag{11}$$

有正定对称解 $P_i$, 则变时滞不确定性大系统(1)可分散无记忆状态反馈镇定。

式(11)两边分别左乘和右乘 $P_i^{-1}$, 记 $X_i = P_i^{-1}$, $Y_i = K_iX_i$, 则得

$$A_iX_i + X_iA_i^{\mathrm{T}} + \alpha_iI + \alpha_i^{-1}X_i\Gamma(C_i)X_i + \gamma_iB_iB_i^{\mathrm{T}} + \beta_i\Omega(E_i) + (\beta_i^{-1} + \gamma_i^{-1})Y_i^{\mathrm{T}}Y_i + F_{1i} + F_{2i} + X_iF_{3i}X_i < 0 \tag{12}$$

由Schur补[5]知式(12)等价于式(4), 于是定理得证。

**注3** 如果凸优化问题

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N}G_i + \sum_{i=1}^{N}H_i\right),\quad G_i > 0,\quad H_i > 0$$

约束条件为LMI式(4)及下式

$$\begin{bmatrix} -G_iI & Y_i^{\mathrm{T}} \\ Y_i & -I \end{bmatrix} < 0,\quad \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & H_iI \end{bmatrix} > 0 \tag{13}$$

有解, 则可保证系统(1)具有较小的反馈增益 $K_i = Y_iX_i^{-1}$。

**注4** 注3中的凸优化问题具有一组LMI约束, 可以应用MATLAB的LMI软件中的mincx命令求解, 它提供了一种设计具有较小反馈增益的分散鲁棒容错控制律的系统方法。

## 4 结 论

本文研究了一类不确定项具有数值界的变时滞不确定关联系统的分散鲁棒容错控制问题。针对该系统以LMI的形式给出了一种对执行器发生故障时具有完整性的分散鲁棒容错控制律的设计方法。

## 参考文献:

[1] Jamishidi M. Large-scale systems, modelling and control[M]. New York: Elsevier North, 1983.

[2] Mehdi D, Hamid M A, Ferrin F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems[J]. Automatica, 1996, 32(7): 1081-1083.

[3] 刘新宇, 高立群, 张文力. 不确定线性组合系统的分散镇定与输出跟踪[J]. 信息与控制, 1998, 2(5): 342-350.

[4] Wang Y Y, Xie L H, E de Sou Za. Robust control of uncertain nonlinear systems[J]. Systems and Control Letters, 1992, 19(2): 139-149.

[5] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E *et al*. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadephia: SIAM, 1994.

[6] 韩清龙, 俞金寿. 不确定性连续系统具有完整性的反馈设计新方法[J]. 自动化学报, 1998, 24(6): 768-775.

[7] 孙金生, 李军, 王执铨. 时滞不确定系统的鲁棒容错控制[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(2): 267-271.

[8] Lwaski T, Skelton R E. All controllers for the general $H_\infty$ control problem, LMI existence conditions and state space formulas[J]. Automatica, 1994, 30(9): 1307-1317.

[9] Wang Z, Huang B, Unbehauen H. Robust reliable control for a class of uncertain nonlinear state delayed systems[J]. Automatica, 1999, 35(6): 955-963.