第16卷 第6期 控 制 与 决 策 2001年11月
Vol 16 No. 6 CONTROL AND DECISION Nov. 2001

文章编号: 1001-0920(2001)06-0974-03

基于鲁棒控制的期权套期保值策略

刘海龙, 吴冲锋
(上海交通大学 管理学院, 上海 200030)

摘　要: 在标的资产价格服从带有随机方差几何布朗运动的非完全市场假设条件下, 应用随机微分对策方法, 研究与标的资产有关的欧式期权的动态套期保值策略问题。建立了最优动态套期保值策略的随机微分对策数学模型, 给出了基于鲁棒控制的均方复制误差最小的自融资动态套期保值策略。当方差为时间的确定性函数时, 最优动态套期保值策略与用Black-Scholes套期比表示的delta套期保值策略是一致的。

关键词: 套期保值; 鲁棒控制; 期权; 随机方差; 随机微分对策
中图分类号: F830.9　　**文献标识码**: A

Option Hedging Strategy Based on Robust Control

LIU Hai-long, WU Chong-feng
(Management School, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The dynamic hedging problem for European options is studied by applying stochastic differential game method, under the assumption of incomplete market where the underlying assets prices follow geometric Brownian motion with stochastic volatility. The stochastic differential game model for the self-financing hedging strategy is estabilished. A dynamic hedging portfolio that yields the minimum mean-square replication error is given. When the volatility is a deterministic function of time, the strategy coincides with Black-Scholes's delta-hedging.

Key words: hedging; robust control; option; stochastic volatility; stochastic differential games

1 引　　言

现代金融经济学最重要的突破之一是Black-Scholes和Merton的期权定价理论。有关期权定价方面的理论和应用已经有了较为丰富的研究成果[1~3]。而金融风险管理中最经典、最常用的套期保值策略是基于期权定价公式的Delta套期保值策略, Gmama和Vega中性策略。但是这些策略都是在完全市场假设下得到的, 都要求标的资产的价格服从标准几何布朗运动。事实上, 现实的金融市场往往都是非完全市场。非完全市场产生的原因很多, 比如, 投资者的偏好、政策的影响、市场的摩擦、非对称信息、价格的不连续性等。这些众多的因素都将以复杂方式影响着金融市场的运行。

有关非完全金融市场套期保值问题一直没有得到很好解决[4~8]。文献[6]基于鲁棒控制研究了期权定价问题; 文献[7]是在离散时间框架下, 研究了期权套期保值策略问题; 文献[8]在假定标的资产的价

收稿日期: 2000-07-11; **修回日期**: 2000-11-07
基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(70025303); 教育部跨世纪优秀人才培养计划基金项目
作者简介: 刘海龙(1959—), 男, 吉林省吉林市人, 教授, 博士后, 主要从事金融工程研究; 吴冲锋(1962—), 男, 浙江温州人, 教授, 博士生导师, 主要从事金融工程研究。

格上下限已知的情况下, 给出了一种鲁棒套期保值算法。本文则通过建立期权套期保值的随机微分对策数学模型, 进而给出了基于鲁棒控制的期权套期保值策略。该方法与以往研究有两点不同: 1) 假设标的资产价格服从一个带有随机方差的几何布朗运动, 而随机方差服从一个具有最大波动幅度的几何布朗运动; 2) 运用的是随机微分对策方法, 给出的是基于鲁棒控制的期权套期保值策略。

2　期权套期保值问题描述

在给出解决非完全市场条件下套期保值问题的随机微分对策方法之前, 首先提出如下假设:

1) 市场是无摩擦的, 即没有税收和交易费用, 股票不付红利, 没有买空卖空限制;

2) 市场存在一个不变的借贷利率 r;

3) 标的资产价格 $p(t)$ 服从一个具有随机方差的几何布朗运动。

$$\mathrm{d}p(t) = \mu p(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)p(t)\mathrm{d}w_1(t) \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\sigma(t) = g(\sigma)\mathrm{d}t + \beta v(t)\sigma(t)\mathrm{d}w_2(t) \tag{2}$$

其中, $\sigma(t)$ 是随机变量, 表示标的资产价格增长率波动的方差, μ 和 β 是常数, 分别表示标的资产价格的预期增长率和随机变量 $\sigma(t)$ 的最大波动幅度。$g(\sigma)$ 是 $\sigma(t)$ 的连续函数, $v(t)\in[-1,1]$ 描述了 $\sigma(t)$ 的扰动方式, $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 是相互独立的标准维纳过程。

设 $F(p(T))$ 表示与标的资产有关的期权到期支付, $u(t), y(t), x(t)$ 分别表示在 t 时刻持有某标的资产的数量, 银行存款的金额和证券组合的市场价值, 因此有

$$x(t) = u(t)p(t) + y(t)$$

为便于研究, 不妨设 $r=0$。另外还假设在 $t=0$ 时刻以后证券组合是自融资的, 即满足如下条件

$$\mathrm{d}x(t) = u(t)\mathrm{d}p(t) \tag{3}$$

式(3) 还可写成

$$\mathrm{d}x(t) = \mu p(t)u(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)p(t)u(t)\mathrm{d}w_1(t) \tag{4}$$

我们的问题是寻找自融资证券组合套期保值策略 $u(t)$, 使终期证券组合的价值 $x(T)$ 尽可能接近期权的到期支付 $F(p(T))$, 也就是说, 寻找套期保值策略, 使方差的随机变异最差情况下, 均方复制误差最小, 即

$$\min_{u(t)}\max_{v(t)} \mathrm{E}^{t,x}[x(T) - F(p(T))]^2 \tag{5}$$

则式(1), (2), (4) 和(5) 构成了期权套期保值的随机微分对策模型。

3　套期保值策略

为了求解上述随机微分对策问题, 首先给出下面的定理(定理证明参见文献[9]):

定理 1　随机微分对策问题(1), (2), (4) 和(5) 存在唯一的值函数 $V(t,x,p,\sigma)$, 且是如下 Isaacs-Bellman 方程的解

$$\begin{cases} V_t + \dfrac{1}{2}\sigma^2 p^2(t)V_{pp} + g(\sigma)V_\sigma + \mu p(t)V_p + \\ \min\limits_u\max\limits_v\left\{\mu p(t)u(t)V_x + \dfrac{1}{2}\sigma^2 p^2(t)u^2(t)V_{xx} + \right. \\ \left.\dfrac{1}{2}\beta^2 v^2(t)\sigma^2 V_{\sigma\sigma} + \sigma^2 p^2(t)u(t)V_{px}\right\} = 0 \\ V(T,x(T),p(T),\sigma(T)) = \\ [x(T) - F(p(T))]^2 \end{cases} \tag{6}$$

其中, V 的下角标 t, x, p, σ 分别表示 V 关于相应变量的偏导数。

下面通过对值函数进行合理变换, 简化问题的复杂性, 从而得到较为简单的套期保值策略。首先, 解方程(6) 的优化问题得到基于值函数 V 的期权套期保值策略为

$$u(t) = -(\mu V_x + \sigma^2 p(t)V_{px})/\sigma^2 p(t)V_{xx} \tag{7}$$

由于式(7) 表示的期权套期保值策略是基于值函数的一阶偏导数和二阶偏导数给出的, 而且看不到与 delta 套期保值策略的任何关系, 为了找出套期保值策略与 delta 套期保值策略的关系, 现作如下变换。设

$$\begin{aligned} &V(t,x,p,\sigma) = \\ &A(t,\sigma(t))[x - B(t,p(t),\sigma(t))]^2 + \\ &C(t,p(t),\sigma(t)) \end{aligned} \tag{8}$$

为便于书写, 令

$$A := A(t,\sigma(t)),\quad B := B(t,p(t),\sigma(t))$$
$$C := C(t,p(t),\sigma(t))$$

则

$$V_t = A_t(x - B)^2 - 2A(x - B)B_t + C_t \tag{9}$$

$$V_p = -2A(x - B)B_p + C_p \tag{10}$$

$$V_x = 2A(x - B) \tag{11}$$

$$V_\sigma = A_\sigma(x - B)^2 - 2A(x - B)B_\sigma + C_\sigma \tag{12}$$

$$V_{pp} = 2AB_p^2 - 2A(x - B)B_{pp} + C_{pp} \tag{13}$$

$$V_{xx} = 2A \tag{14}$$

$$\begin{aligned} V_{\sigma\sigma} = {} & A_{\sigma\sigma}(x - B)^2 - 4A_\sigma(x - B)B_\sigma + \\ & 2AB_\sigma^2 - 2A(x - B)B_{\sigma\sigma} + C_{\sigma\sigma} \end{aligned} \tag{15}$$

$$V_{xp} = V_{px} = -2AB_p \tag{16}$$

其中,A, B, C 的下角标 t, p, σ 分别表示 A, B, C 关于相应变量的偏导数。先将式(7) 代入方程(6), 再将式(9)～(16) 代入式(6) 整理得

$$\left[A_t - \frac{\mu^2}{\sigma^2}A + g(\sigma)A_\sigma + \frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 A_{\sigma\sigma}\right](x - B)^2 +$$
$$[-2AB_t - 2g(\sigma)AB_\sigma - \sigma^2 p^2(t)AB_{pp} -$$
$$\beta^2\sigma^2 AB_{\sigma\sigma} - 2\beta^2\sigma^2 A_\sigma B_\sigma](x - B) +$$
$$C_t + g(\sigma)C_\sigma + \mu p(t)C_p + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2(t)C_{pp} +$$
$$\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 C_{\sigma\sigma} + \beta^2\sigma^2 AB_\sigma^2 = 0 \tag{17}$$

因为 $x - B \neq 0$, 所以必有

$$A_t = \frac{\mu^2}{\sigma^2}A - g(\sigma)A_\sigma - \frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 A_{\sigma\sigma}$$
$$A(T, \sigma) = 1 \tag{18}$$

$$B_t = -g(\sigma)B_\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2(t)B_{pp} -$$
$$\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 B_{\sigma\sigma} - \frac{\beta^2\sigma^2}{A}A_\sigma B_\sigma$$
$$B(T, p, \sigma) = F(p(T)) \tag{19}$$

$$C_t = -g(\sigma)C_\sigma - \mu p(t)C_p - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2(t)C_{pp} -$$
$$\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 C_{\sigma\sigma} - \beta^2\sigma^2 AB_\sigma^2$$
$$C(T, p, \sigma) = 0 \tag{20}$$

通过数值解法可以求出带有边值条件的柯西问题(18), (19) 和(20) 的解 A, B, C。再将式(9)～(16) 代入式(7) 整理得期权套期保值策略为

$$u(t) = B_p - \frac{\mu}{\sigma^2 p(t)}(x - B) \tag{21}$$

也可以直接将式(9)～(16) 代入方程(6), 再求解方程(6) 的优化问题, 同样能得到期权套期保值策略(21)。式(21) 是一个基于函数 B 及其一阶偏导数 B_p 的期权套期保值策略, 与式(7) 表示的期权套期保值策略相比明显简单。通过把求解一个四维二阶偏微分方程值函数问题转化成求解一个二维二阶偏微分方程和两个三维二阶偏微分方程问题, 不但可以简化问题的复杂性, 而且还能刻画非完全市场的结构特征。特别是用函数的二阶偏微分表示的投资策略(7) 转化成用一阶微分表示的投资策略(21), 可以明显地看出, 当动态完全保值时, 最优动态套期保值策略 $u(t)$ 恰好就是著名的 Black-Scholes 套期比 B_p。

4 结 语

本文在 Schweizer 的研究成果基础上, 应用随机微分对策方法研究了随机方差服从几何布朗运动情况下的套期保值问题, 所得到的基于鲁棒控制的期权套期保值策略是 delta 期权套期保值策略的推广。delta 期权套期保值策略是基于鲁棒控制套期保值策略的特例。

参考文献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. J of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.

[2] Merton R C. Applications of option-pricing theory: Twenty-five years later[J]. The American Economic Review, 1998, 88(3): 323-349.

[3] Scholes M. Derivatives in a dynamic environment[J]. The American Economic Review, 1998, 88(3): 350-370.

[4] Schweizer M. Mean-variance hedging for general claims[J]. Annals of Applied Probability, 1992, 2: 171-179.

[5] Shreve S E, Soner H M. Optimal investment and consumption with transaction costs[J]. The Annual of Applied Probability, 1994, 4(3): 609-692.

[6] Mceneaney W M. A robust control framework for option pricing[J]. Mathematics of Operation Research, 1997, 22(1): 202-221.

[7] 钟麦英, 黄小原. 期权套期保值的非线性 H_∞ 控制问题[J]. 东北大学学报, 1999, 20(5): 555-558.

[8] Howe M A, Rustem B. A robust hedging algorithm[J]. J of Economic Dynamics and Control, 1997, 21(6): 1065-1092.

[9] 刘海龙, 郑立辉, 樊治平, 等. 证券投资决策的微分对策方法研究[J]. 系统工程学报, 1999, 14(1): 69-72.