

文章编号: 1001-0920(2001)06-0873-05

不确定线性系统 LQ 设计的鲁棒性分析

薛安克, 蒋楠, 林岳松

(杭州电子工业学院 自动化系, 浙江 杭州 310037)

摘 要: 针对不确定线性系统, 研究 LQ 设计的鲁棒最优性分析问题。在建立 Riccati 方程和频域传递函数矩阵关系的基础上, 给出了不确定闭环系统鲁棒最优的一个充分条件。对结构和非结构不确定系统, 分别给出了 LQ 控制系统的鲁棒最优性分析方法。进一步给出了改进结构不确定系统鲁棒最优性的一种优化方法。实例分析及仿真结果表明了所给结论的正确性和有效性。

关键词: 不确定线性系统; 鲁棒控制; 最优控制; 鲁棒最优; 制浆造纸过程

中图分类号: TP 13

文献标识码: A

Robustness Analysis of LQ Design for Uncertain Linear Systems

XUE An-ke, JIANG Nan, LIN Yue-song

(Automation Department, Hangzhou Institute of Electronics Engineering, Hangzhou 310037, China)

Abstract: The robustness of LQ design for uncertain linear systems is discussed. Sufficient conditions are given to guarantee the uncertain closed-loop systems robust optimal. In addition, robustness analysis approaches of LQ design for structured and unstructured uncertain systems are proposed respectively. Furthermore, an approach of improving the robustness for structured uncertain systems with LQ design is presented. The corresponding simulation results show the correctness and effectivity of the proposed method.

Key words: uncertain linear systems; robust control; optimal control; robust optimal; paper making process

1 引 言

规范线性二次调节器(LQ 调节器)因具有(1/2,)增益裕度和 60 相位裕度的固有稳定性质,在实际中得到了广泛的应用^[1]。但当系统存在不确定性时,规范 LQ 调节器所固有的最优特性将受到影响^[2]。有关鲁棒 LQ (RLQ) 问题的研究已引起人们的广泛关注,并取得了许多研究成果^[2-5]。然而,现

有结果大多受到不确定性范数有界^[6]以及秩一分解^[7]等条件的约束,因此不可避免存在一定的保守性。如何给出不确定系统 LQ 问题保守性的度量,即解决 LQ 设计的鲁棒性分析问题,对不确定系统鲁棒 LQ 调节器的分析和综合是十分必要的。文献[5]讨论了不确定系统 LQ 调节器的鲁棒性问题,得到了不同形式的鲁棒稳定界。然而,所得结论仅能保证标称系统具有规范 LQ 调节器(1/2,)增益裕度和

收稿日期: 2000-07-07; 修回日期: 2000-11-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(69874036); 浙江省自然科学基金重点项目(ZD9905); 中国博士后科学基金项目; 总装备部军事电子预研基金项目(57.7.12)

作者简介: 薛安克(1957—),男,山东莒南人,教授,博士后人员,博士生导师,从事鲁棒和最优控制、智能控制理论及应用等研究; 蒋楠(1976—),男,浙江金华人,硕士研究生,从事鲁棒控制和 H 控制理论及应用研究。

60 相位裕度的最优特性。当系统存在不确定性时,只能保证不确定闭环系统鲁棒稳定,而无法确定其鲁棒稳定裕度。

本文利用频域传递函数矩阵概念,讨论了不确定线性系统 LQ 设计的鲁棒 (1/2,) 增益裕度和 60 相位裕度 (简称鲁棒最优性) 问题,给出了非结构和一类结构不确定系统的鲁棒最优界。对结构不确定系统,进一步给出一种通过参数和性能指标加权阵选择来改善不确定闭环系统鲁棒性的方法,从而减少 LQ 设计的保守性。以制浆造纸过程 LQ 最优控制系统的设计和分析为例,验证了本文所给结论的正确性,同时表明本文方法对 LQ 调节器工程实际应用具有很好的指导意义。

2 问题提出和基本公式

考虑由以下状态方程描述的一类不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A)x(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 是状态, $u(t) \in R^m$ 是控制输入, $A_0 \in R^{n \times n}$ 和 $B \in R^{n \times m}$ 是已知常阵, ΔA 是具适当维数的不确定实值矩阵。系统 (1) 所对应的性能指标为

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (2)$$

其中 $Q > 0, R > 0$ 且 R 为对角阵。

若假设 (A_0, B) 可稳, 则系统 (1) 所对应的标称系统 $\Sigma(A_0, B)$ (即 $\Delta A = 0$) 和性能指标 (2) 存在状态反馈最优控制

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T P x(t) \quad (3)$$

使闭环系统渐近稳定,并具有无穷增益和 60° 相位的最优稳定裕度。其中 $P > 0$, 且满足

$$PA_0 + A_0^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (4)$$

然而,当系统 (1) 存在不确定时,由式 (3) 构成的不确定闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A - BK)x(t) \quad (5)$$

的稳定裕度甚至其渐近稳定性都将受到影响。

引理 1^[8] 考察不确定系统 (1) 的标称系统 $\Sigma(A_0, B)$ 和性能指标 (2), 如果存在正定对称矩阵 $P > 0$ 且满足 Riccati 方程 (4), 则有

$$(I + G\Phi(-s)B)^T R (I + G\Phi(s)B) = R + B^T \Phi^T(-s) (-P\Delta A - \Delta A^T P + Q) \Phi(s)B \quad (6)$$

其中

$$\Phi(s) = (sI - A_0 - \Delta A)^{-1}, \quad G = R^{-1}B^T P \quad (7)$$

3 鲁棒最优条件

对矩阵 $X \in R^{n \times n}$, 记 $\bar{\lambda}(X) [\bar{\sigma}(X)]$ 和 $\underline{\lambda}(X) [\underline{\sigma}(X)]$ 分别表示矩阵 X 的最大和最小特征值 (奇异值), $\sigma_i(X)$ 表示矩阵 X 的第 i 个奇异值。

引理 2^[3] 若记 $T(s) = R^{1/2}G\Phi(s)BR^{-1/2}$, $G, \Phi(s)$ 和 B 的意义与引理 1 中相同。如果存在某正常数 $\alpha_0 < 1$, 使

$$\sigma(I + T(s)) \leq \alpha_0 \quad (8)$$

成立, 则规范 LQ 调节器具有增益裕度 $GM = 1/(1 \pm \alpha_0)$ 和相位裕度 $PM = \pm \cos^{-1}(1 - \alpha_0^2/2)$ 。

定义 1 对不确定系统 (1) 和性能指标 (2), 如果存在状态反馈控制 (3), 使式 (8) 成立, 则称不确定闭环系统 (5) 是具 α_0 裕度鲁棒稳定的。当 $\alpha_0 = 1$ 时, 即闭环系统有 $GM = (1/2,)$ 和 $PM = 60^\circ$ 的鲁棒稳定裕度, 则称不确定闭环系统 (5) 是鲁棒最优的, $u(t)$ 为对应的鲁棒最优控制。

定理 1 对不确定系统 (1) 和性能指标 (2), 如果存在正定对称阵 $P > 0$, 使系统 (1) 对所有允许的不确定性 ΔA 有

$$Q - P\Delta A - \Delta A^T P \geq 0 \quad (9)$$

则由反馈控制 (3) 所构成的不确定闭环系统 (5) 是鲁棒最优的。

定理 1 的证明是显然的。因为当条件 (9) 成立时, 由引理 1 可知, 对所有 i , 有 $\sigma_i(I + T(s)) \leq 1$ 。从而引理 2 中的 $\alpha_0 = 1$ 。

4 鲁棒性能分析

本节讨论不确定系统 (1) 鲁棒最优控制的鲁棒性分析问题。分别给出非结构和结构不确定系统的鲁棒最优性结论。

定理 2 如果存在常数 $\epsilon > 0$ 和一个正定对称矩阵 $P > 0$, 对不确定系统 (1) 的任意非结构不确定性 ΔA , 满足

$$\bar{\sigma}(\Delta A) < \epsilon^{-1} \lambda(Q - \epsilon^{-1} P^2) \quad (10)$$

则系统 (1) 在状态反馈控制 (3) 下的不确定闭环系统 (5) 是鲁棒最优的, 式 (10) 为系统 (1) 的鲁棒最优界。

证明 记 $M = Q - \epsilon^{-1} P^2$, 由式 (10) 可知 $M > 0$, 由于

$$\lambda(\epsilon \Delta A^T \Delta A + \epsilon^{-1} P^2 - Q)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\lambda}(\epsilon \Delta^T \Delta) + \bar{\lambda}(\epsilon^{-1} P^2 - Q) \\ & \bar{\lambda}(\epsilon \Delta^T \Delta) - \lambda(Q - \epsilon^{-1} P^2) \end{aligned} \quad (11)$$

所以有

$$\epsilon \Delta^T \Delta + \epsilon^{-1} P^2 - Q < 0 \quad (12)$$

利用矩阵不等式

$$X^T Y + Y^T X \quad \epsilon X^T X + \epsilon^{-1} Y^T Y$$

其中, $\epsilon > 0$ 为任意常数, X 和 Y 为适当维数的矩阵。由此可知

$$\Delta^T P + P \Delta \quad \epsilon \Delta^T \Delta + \epsilon^{-1} P^2 \quad (13)$$

结合式(12), 再根据定理 1 即知本定理成立。(证毕)

考虑系统(1) 如下形式的结构不确定性 ΔA

$$\Delta A = \sum_{i=1}^l k A_i \quad (14)$$

其中, $k_i \in R^1$ 为不确定实参数, $A_i \in R^{n \times n} (i = 1, 2, \dots, l)$ 为给定的实常矩阵。

定理 3 如果存在常数 $\epsilon > 0$ 和一个正定对称矩阵 $P > 0$, 对不确定系统(1) 任意满足形如式(14) 的结构不确定性 ΔA , 有

$$\sum_{i=1}^l |k_i| \bar{\sigma}(A_i) < (\epsilon^{-1} \lambda(Q - \epsilon^{-1} P^2))^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

则系统(1) 在状态反馈控制(3) 下的不确定闭环系统(5) 是鲁棒最优的, 式(15) 为系统(1) 的鲁棒最优界。

证明 注意到

$$\bar{\sigma}\left(\sum_{i=1}^l k A_i\right) = \sum_{i=1}^l \bar{\sigma}(k A_i) = \sum_{i=1}^l |k_i| \bar{\sigma}(A_i) \quad (16)$$

仿照定理 2 的证明过程, 即可证得本定理。(证毕)

观察定理 3, 因为系统(1) 的结构不确定性与 P, Q, R 及可变参数 ϵ 有关, 所以可通过适当选取有关参数和矩阵, 即优化技术来增加鲁棒最优控制系统的鲁棒最优性。下面给出一种简单可行的算法。

应用 Cauchy-Schw arz 不等式可得

$$\left| \sum_{i=1}^l |k_i| \bar{\sigma}(A_i) \right|^2 \leq \sum_{i=1}^l |k_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^l \bar{\sigma}^2(A_i) \quad (17)$$

因此, 结合定理 3, 要使式(15) 成立, 只要

$$\sum_{i=1}^l |k_i|^2 < \frac{\sigma\left(Q - \frac{1}{\epsilon} P^2\right)}{\sum_{i=1}^l \bar{\sigma}^2(A_i)} \quad (18)$$

由此即可通过参数优化方法来改进不确定系统的鲁棒最优性能。其优化问题可归结为如下命题

$$h = \sum_{i=1}^l |k_i|^2 = \max_{\epsilon, Q, P} \frac{\sigma(Q - \epsilon^{-1} P^2)}{\sum_{i=1}^l \bar{\sigma}^2(A_i)} \quad (19)$$

5 设计举例

某制浆造纸打浆过程^[9] 的动态不确定系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -1.25 & 0 & 0 \\ 0 & -1.56 & 2.21 \\ 0 & 0 & -6.20 \end{bmatrix} x(t) + \\ & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \\ & \begin{bmatrix} -0.07 & 0.07 & 0 \\ 0 & -1.57 & 0 \\ 0 & 0 & 3.10 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (20)$$

选取性能指标权值矩阵为

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag}(10\ 000, 10\ 000, 10\ 000) \\ R &= \text{diag}(1, 1, 1) \end{aligned} \quad (21)$$

将不确定性 ΔA 分解为

$$\Delta A = k_{11} A_1 + k_{12} A_2 + k_{22} A_3 + k_{23} A_4 \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求解式(4) 得 P , 再根据反馈控制(3) 设计控制器, 得

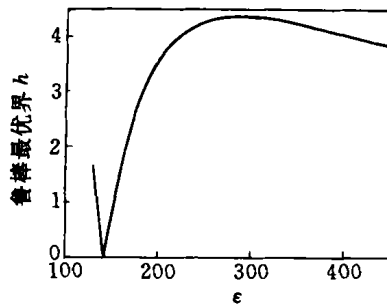
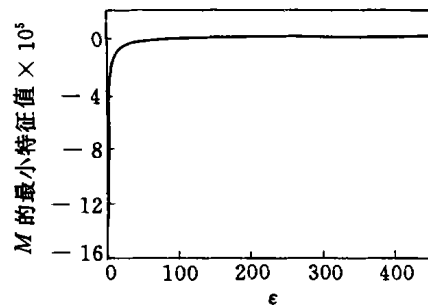
$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1\ 194\ 6 & 50\ 4 & 0\ 4 \\ 50\ 4 & 65\ 2 & 0\ 3 \\ 0\ 4 & 0\ 3 & 31\ 6 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} -83\ 622\ 1 & -3\ 530\ 9 & -0\ 025\ 1 \\ 4\ 429\ 1 & -98\ 909\ 1 & -0\ 467\ 8 \\ 1\ 109\ 8 & 0\ 973\ 2 & 98\ 025\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

按式(19), 选取不同 ϵ 值求解 $M = Q - \epsilon^{-1} P^2$ 的最小特征值和鲁棒最优界, 结果如图 1 和图 2 所示。

从图中分析系统的鲁棒性可得如下结论:

- 1) $\epsilon < 144$ 时, $M < 0$, 此时虽然鲁棒最优界 h 可以达到很大, 但已没有意义;
- 2) $\epsilon > 144$ 时, $M > 0$, 且当 $\epsilon = 285$ 时, 鲁棒最优界 h 达到最大, 为 4 379 6。

由此得到结论: LQ 设计闭环系统的鲁棒最优界为

图1 参数 ϵ 与鲁棒最优界 h 的关系图2 参数 ϵ 与 M 最小特征值的关系表1 不同 q 值所对应的鲁棒最优界和控制增益

q	0.1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
鲁棒最优界	0.389 0	0.391 7	0.397 5	0.452 4	0.902 4	4.379 6	34.352 8	317.977 8
控制增益(数量级)	10^{-3}	10^{-1}	10^0	10^1	10^1	10^1	10^2	10^2

$$k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{23}^2 < 4.3796$$

另外,当 $Q = \text{diag}(q, q, q)$, $R = \text{diag}(1, 1, 1)$ 时,不同 q 值所对应的鲁棒最优界及控制增益(数量级)的结果如表1所示。

从表1可以看出:随着 q 值的增大,系统的鲁棒最优界有明显的增加,但控制增益也同时迅速增加。这说明LQ设计中可以通过选择性能指标加权来改善不确定闭环系统鲁棒性,但要同时考虑使增益限制在实际允许范围内。

为验证理论的正确性和有效性,我们进一步做系统状态响应仿真实验。由前面的计算可知:控制器为式(23)时,鲁棒最优界为 $k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{23}^2 < 4.3796$,取初始状态为 $x_0 = (1 \ 1 \ 1)$ 。对不确定因素处于鲁棒最优界内,分别取 $k_{11} = k_{12} = k_{22} = k_{23} = 1$ (实线); $k_{11} = k_{12} = k_{22} = k_{23} = -1$ (虚线)两组不确定参数,仿真结果如图3所示。然后,为了进行

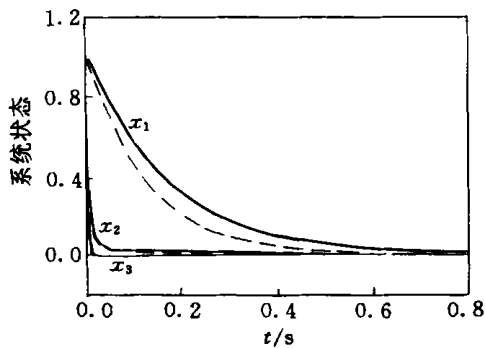


图3 不确定因素在鲁棒最优界内的系统响应曲线

比较,再做不确定因素大于鲁棒最优界的仿真实验。分别取稍大于鲁棒最优界一点 $k_{11} = 2, k_{12} = k_{22} = k_{23} = 1$ (实线); 大于鲁棒最优界较多 $k_{11} = 6, k_{12} = k_{22} = k_{23} = 1$ (虚线); $k_{11} = 1, k_{12} = 6, k_{22} = 1, k_{23} = 1$ (点划线),结果如图4所示。

从图3可见,系统的鲁棒性和动态性能都比较理想,具有希望稳定裕度下的最优性。事实上,对于鲁棒最优界内的所有不确定因素,系统都将具有类似的动态响应。分析图4中曲线可以看出:对于稍大于鲁棒最优界一点的不确定因素(实线),系统仍保持较好的性能;而大于鲁棒最优界较多时,两组不同的不确定因素对系统的影响有很大的区别,说明不确定因素 k_{11} 对系统性能的影响比较强,而对 k_{12} 来说所得出的鲁棒最优界有些保守。鲁棒最优界出现保守性的主要原因可能是在公式推导过程中运用了不等式,以及采用最大和最小奇异值所造成的。

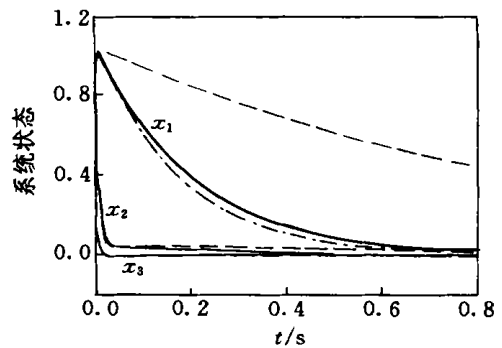


图4 不确定因素在鲁棒最优界外的系统响应曲线

(下转第 881 页)

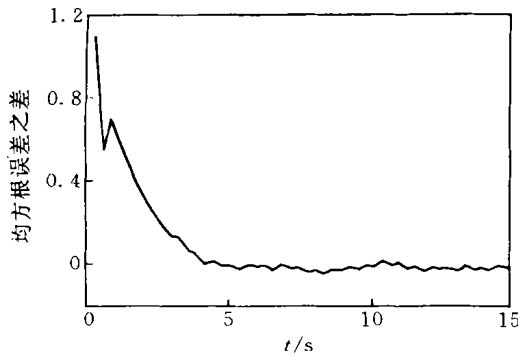


图 4 算法 3 与算法 2 均方根误差之差

方根误差。为了更清楚地看到 3 种算法之间的区别, 图 3 和图 4 分别给出了算法 2 与算法 1 以及算法 3 与算法 2 的融合均方根误差之差。

5 结 论

本文研究在实际系统中更常见的异步多传感器数据融合问题。与其它异步问题的研究不同, 本文在对具有多传感器测量的连续时间系统进行离散化处

理时发现, 即使原来连续系统的噪声相互独立, 相应离散系统的过程噪声与测量噪声以各各传感器测量噪声之间也都是相关的。文中推导了相关噪声情况下的异步融合算法, 并通过仿真例子证明了本文算法处理相关噪声的有效性。

参考文献:

- [1] Abuani A T, Rice T R. On asynchronous data fusion [A]. Proc of the Annual Southeastern Symposium on System Theory[C]. Athens, 1994. 143-146
- [2] Abuani A T, Rice T R. Performance analysis of an asynchronous track fusion and architecture[A]. Proc of SPIE[C]. Orlando, 1997. 194-205
- [3] Abuani A T, Rice T R. On optimal synchronous and asynchronous track fusion [J]. Optical Engineering, 1998, 37(2): 427-433
- [4] 奥斯特隆姆 K J. 随机控制理论导论[M]. 潘裕焕译. 北京: 科学出版社, 1983
- [5] 李树英, 许茂增. 随机系统的滤波与控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991

(上接第 876 页)

6 结 语

本文研究了不确定线性系统 LQ 设计的鲁棒最优性分析问题, 给出了不确定闭环系统具有 $(1/2, \quad)$ 增益裕度和 60 相位裕度的鲁棒最优条件, 并分别给出了结构和非结构不确定系统的鲁棒最优性分析方法。对结构不确定系统, 还给出了一种通过参数和性能指标加权阵选择来提高 LQ 设计鲁棒最优性的优化求解方法。本文所提出的问题和方法, 对鲁棒控制理论的应用研究进行了有益的探讨。制浆造纸 LQ 系统应用实例证明了结论的正确性和有效性。

参考文献:

- [1] Safonov M G, Athans M. Gain and phase margins for multiloop LQG regulators[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1977, 22(2): 173-179
- [2] Douglas J, Athans M. Robust linear quadratic designs with real parameter uncertainty [J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(1): 107-111
- [3] Lehtomaki N A, Sandell Jr N R, Athans M. Robust-

ness results in linear Gaussian based multivariable control designs[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1981, 26(1): 75-92

- [4] Anderson, Moore. Optimal control[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989
- [5] Chung D, Kang T, Lee J G. Stability robustness of LQ optimal regulators for the performance index with cross-product terms[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(8): 1698-1702
- [6] IR Petersen. A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 30(9): 904-907
- [7] 黄琳, 王龙, 于年才. 系统鲁棒性的若干问题——背景、现状与挑战[J]. 控制理论与应用, 1991, 8(1): 11-29
- [8] 薛安克, 吕应权, 孙优贤. 性能指标含交叉项的不确定线性系统鲁棒保稳定控制[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(6): 742-746
- [9] 薛安克. 不确定线性系统鲁棒二次最优控制理论及应用研究[D]. 杭州: 浙江大学工业控制技术研究所, 1997