

文章编号: 1001-0920(2001)0S-0700-06

一般周期时变系统线性二次型微分对策及 H 控制问题

陈阳舟

(北京工业大学 电子信息与控制工程学院, 北京 100022)

摘要: 讨论了周期时变线性系统的一般线性二次型微分对策, 即状态方程非齐次且二次型赢得或损失函数包含线性项的一般情况。给出了保性能对策问题和鞍点对策问题可解的充要条件和最优策略的解析构造以及对策值。然后应用对策问题的结果来处理周期时变线性系统的 H 控制问题。

关键词: 周期时变线性系统; 微分对策; 频率条件; 非震荡性条件; Riccati 微分方程; H 控制

中图分类号: O 231

文献标识码: A

General Linear Quadratic Differential Games and H Control Problem for Periodically Time-varying Linear Systems

CHEN Yang-zhou

(School of Electronic Information & Control Engineering, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China)

Abstract: General linear quadratic differential games of periodically time-varying linear systems are discussed for the case that the state equation is non-homogenous and the quadratic win or loss function contains linear terms. Some necessary and sufficient conditions for the solubility of the cost-guaranteed game and saddle-point game are given. The optimal strategies are constructed and the optimal game values are given. The results are applied to H control problem for periodically time-varying linear systems.

Key words: periodically time-varying linear systems; differential game; frequency condition; nonoscillatory condition; Riccati differential equation; H control

1 引言

近几十年里, 周期时变线性系统的研究引起了广泛的关注^[1-4]。这是因为大量工业过程与社会系统必须建模为周期系统, 且多速率采样控制也导致一类特殊周期系统的研究, 而且即使对时不变系统, 采用周期时变控制器有时比时不变控制器更优越;

另一方面, 时不变系统的 H 控制问题已获得了圆满解决, 并且发现 H 控制问题与微分对策有着天然联系^[5,6]。但据作者所知, 对周期时变线性系统的相应工作还没见充分报道。本文首先讨论一般周期时变系统线性二次型微分对策, 然后将其应用于周期时变线性系统的 H 控制问题。

收稿日期: 2001-01-05; 修回日期: 2001-05-08

基金项目: 国家自然科学基金项目 (69974004 & 69874006); 北京市科干局青年科技骨干培养基金项目 (99020400)

作者简介: 陈阳舟 (1963—), 男, 湖北仙桃人, 教授, 博士后, 从事周期时变系统的分析与控制, 时滞系统的分析与控制及其在建筑结构减振技术中的应用等研究。

2 预备知识

本文中, 星号 $*$ 表示共轭转置; \bullet 是通常的欧式范数; \bullet_2 是勒贝格平方可积函数空间 $L_2 = :L_2[0, \infty)$ 的范数. 矩阵 $A(\bullet)$ 为 Hurwitz 稳定是指相应系统 $dx/dt = A(t)x$ 为指数稳定. 矩阵对 $(A(\bullet), B(\bullet))$ 的 L_2 -能稳性是指系统 $\dot{x} = A(t)x + B(t)u, x(0) = a$ 对任意 $a \in R^n$ 和 $u(\bullet) \in L_2$ 的解满足 $x(\bullet) \in L_\infty$. $(A(\bullet), C(\bullet))$ 为 L_2 -能检测当且仅当 $(A^*(\bullet), C^*(\bullet))$ 为 L_2 -能稳^[1].

设 $Z(t)$ 为下列规范方程的一个解矩阵

$$J \frac{dz}{dt} = H(t)z, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} H_{11}(t) & H_{21}^*(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) \end{bmatrix} = H^*(t) = H(t+T)$$

其中, I_n 为 n 阶单位矩阵, 每个分块 $H_{ij}(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵^[4]. 如果式(1) 满足频率条件

$$\det[Z(T) - e^{i\omega} I_{2n}] \neq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi), \quad i = \sqrt{-1} \quad (2)$$

则可构造矩阵

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ \Psi(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

使其列向量构成式(1) 的 n 个线性无关的具衰减性质 $|z_i(t)| \rightarrow 0$ 的解^[1]. 如果条件

$$\det X(t) \neq 0, \quad \forall t \quad (4)$$

成立, 则说方程(1) 具有非振荡性^[1].

引理 1 方程(1) 满足频率条件(2) (于是可以如式(3) 定义矩阵 $X(t), \Psi(t)$) 和非振荡条件(4) 当且仅当 Riccati 微分方程

$$\frac{dR}{dt} = [I_n \quad -R]H(t) \begin{bmatrix} I_n \\ -R \end{bmatrix} \quad (5)$$

存在唯一的周期对称矩阵解 R , 使得 $H_{21} - H_{22}R$ 是 Hurwitz 稳定矩阵(这样的解称为方程(5) 的镇定解). 而且方程(2) 和(5) 的解之间成立关系 $R = -\Psi X^{-1}$.

以符号 $\text{dom}(\text{Ric})$ 记所有满足频率条件(2) 和非振荡条件(4) 或者使得相应的 Riccati 方程(5) 存在镇定解的周期对称矩阵 $H(t)$ 之集合. 对任意 $H(t) \in \text{dom}(\text{Ric})$, 相应 Riccati 方程的唯一镇定周期对称解记为 $\text{Ric}(H(t))$.

引理 2 设 G 为 L_2 上的任意线性有界自共轭算子. $K(z) = \langle Gz, z \rangle + 2\langle g, z \rangle$ 为定义在 L_2 上的二次泛函, $g \in L_2$ 给定, (\bullet, \bullet) 表示 Hilbert 空间 L_2 的内积. 则存在唯一 $z_0 \in L_2$ 使得 $\sup_z K(z) =$

$K(z_0)$ 当且仅当 G 为正定算子.

引理 1 和引理 2 的证明是直接的, 从略.

引理 3^[4] 矩阵

$$\begin{bmatrix} -C^*(t)C(t) & A^*(t) \\ A(t) & B_2(t)\Gamma_2^{-1}(t)B_2^*(t) \end{bmatrix}$$

属于 $\text{dom}(\text{Ric})$ 当且仅当 $(A(\bullet), B(\bullet))$ 为 L_2 -能稳, $(A^*(\bullet), C^*(\bullet))$ 为 L_2 -能检测.

3 周期时变线性二次型微分对策

3.1 问题的描述

考虑非齐次周期时变线性系统

$$\dot{x} = A(t)x + B_1(t)v + B_2(t)u + w(t) \quad (6)$$

和一个一般的二次型泛函

$$J[u, v] = \int_0^T F[x(t), v(t), u(t)] dt \quad (7)$$

$$F[x, v, u] =$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} G(t) & g_1(t) & g_2(t) \\ g_1^*(t) & -\Gamma_1(t) & 0 \\ g_2^*(t) & 0 & \Gamma_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k(t) \\ l_1(t) \\ l_2(t) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 $x \in R^n$ 为状态, $v \in R^l$ 和 $u \in R^m$ 分别为局中人 v 和 u 的对策, 矩阵 $A(t), B_i(t), G(t), g_i(t), \Gamma_i(t)$ ($i = 1, 2$) 具有适当维数且其元素为 T 周期实连续函数, $G(t)$ 为对称矩阵, $\Gamma_i(t)$ ($i = 1, 2$) 对任意时刻 t 为正定矩阵, 向量函数 $w(t), k(t), l_i(t)$ ($i = 1, 2$) 属于 L_∞ . 局中人 v 选择自己的策略极大化泛函(2) (因而式(2) 称为局中人 v 的赢得函数, $-J[u, v]$ 则为其损失函数), 局中人 u 选择自己的策略极小化泛函(2) (因而式(2) 称为局中人 u 的损失函数, $-J[u, v]$ 则为其赢得函数).

3.1.1 局中人 v 的保性能对策(maximin) 问题

假定局中人 v 选择策略时仅仅知道系统模型(1) 和赢得函数(2), 于是其策略是时间 t 的勒贝格平方可积函数 $v(\bullet) \in L_2$. 而局中人 u 则不仅知道系统模型(1) 和损失函数(2), 还知道系统当前的状态和对方的策略, 即其策略是一个从 $R \times R^n \times L_2$ 到 R^m 的函数 $u(t, x(t), v(\bullet))$. 如果策略 $u(t, x(t), v(\bullet))$ 使系统(1) 具有唯一定义在区间 $[0, \infty)$ 上的解, 则说此策略是容许的. 局中人 v 的策略 v^0 称为是最优保性能的, 若有

$$\min_u J[u, v^0] = \max_v \min_u J[u, v] =: L$$

其中 L 称为保性能对策问题的下值。可以看出, 该对策问题的求解步骤如下:

1) 对于任意 $v \in L_2$ 寻找函数 $u(t, x(t), v(\cdot))$ 使得

$$J[u(t, x(t), v), v] = \min_u J[u, v]$$

2) 寻找 $v^0 \in L_2$ 使得

$$J[u(t, x(t), v^0), v^0] = \max_v J[u(t, x(t), v), v]$$

于是 v^0 即是局中人 v 的最优保性能策略, 而 $u(t, x(t), v^0)$ 称为局中人 v 的最坏干扰。局中人 v 的保性能对策问题称为是可解的, 如果对于任意初始状态 $x(0) = x_0$, 上述要寻找的函数存在。

3.1.2 局中人 u 的保性能对策 (minimax) 问题

假定局中人 u 选择策略时仅仅知道系统模型 (1) 和损失函数 (2), 则其策略是时间 t 的勒贝格平方可积函数 $u(\cdot) \in L_2$ 。而局中人 v 不仅知道系统模型 (1) 和赢得函数 (2), 还知道系统当前的状态和对方的策略, 则其策略是一个从 $R \times R^n \times L_2$ 到 R^l 的函数 $v(t, x(t), u(\cdot))$ 。如果策略 $v(t, x(t), u(\cdot))$ 使得系统 (1) 具有唯一定义在区间 $[0, \infty)$ 上的解, 则说此策略是容许的。局中人 u 的策略 u^0 称为是最优保性能策略, 若

$$\max_v J[u^0, v] = \min_u \max_v J[u, v] =: \bar{J}$$

其中 \bar{J} 称为保性能对策问题的上值。易证 minimax 问题可转化为 maxmin 问题。

3.1.3 鞍点对策问题 (平衡对策问题)

如果 $\bar{J} = L$, 即双方策略 (u^0, v^0) 使得

$$\max_v J[u^0, v] = \min_u J[u, v^0] = J[u^0, v^0]$$

则称 (u^0, v^0) 为对策问题的一个鞍点, $\bar{J} = L =: J^0$ 称为对策的值。鞍点的意义在于, 任何局中人单方面改变自己的策略都可能增大自己的损失或减少自己的赢得。

3.2 主要结果

以下为简便常省略时间变量 t 。

定理 1 设 (A, B_2) 为 L_2 -能稳, 则局中人 v 的保性能对策问题可解当且仅当矩阵 H_1 和 H_2 (定义见下面式 (10)) 满足条件

$$H_1 \in \text{dom}(\text{Ric}), \quad H_2 \in \text{dom}(\text{Ric}) \quad (9)$$

若条件 (9) 满足, 则局中人 v 的最优保性能策略为

$$v^0(t) = r_1^*(t)x(t) + \rho_1(t)$$

最坏干扰为

$$u(t, x(t), v^0) = r_2^*(t)x(t) + \rho_2(t)$$

保性能对策下值为

$$L = \frac{1}{2}x_0^* R(0)x_0 + p(0)^* x_0 + \frac{1}{2}q(0)$$

其中矩阵 H_1 和 H_2 等定义如下

$$H_1 = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \Gamma_1 \bar{r}_1^* & (\bar{B}_2 + B_1 \bar{r}_1)^* \\ \bar{B}_2 + B_1 \bar{r}_1 & B_1 \Gamma_1 B_1^* - B_2 \Gamma_2 B_2^* \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -G + g_2 \Gamma_2^{-1} g_2^* & (A - B_2 \Gamma_2^{-1} g_2^*) \\ A - B_2 \Gamma_2^{-1} g_2^* & B_2 \Gamma_2^{-1} B_2^* \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \text{Ric}(H_1), \quad R_2 = \text{Ric}(H_2)$$

$$R = R_2 - R_1, \quad \bar{B}_2 = A + B_2 \bar{r}_2^*$$

$$r_1 = (R B_1 + g_1) \Gamma_1^{-1}, \quad r_2 = -(R B_2 + g_2) \Gamma_2^{-1}$$

$$\bar{r}_1 = (R B_1 + g_1) \Gamma_1^{-1}, \quad \bar{r}_2 = -(R B_2 + g_2) \Gamma_2^{-1} \quad (10)$$

向量 $p, q \in L_2$ 等定义为

$$\dot{p} = -(A + B_1 r_1^* + B_2 r_2^*)^* p - r_1 l_1 - r_2 l_2 - R w - k$$

$$\dot{q} = \rho_2^* \Gamma_2 \rho_2 - \rho_1^* \Gamma_1 \rho_1 - 2p^* w$$

$$\rho_1 = \Gamma_1^{-1} (B_1^* p + l_1), \quad \rho_2 = -\Gamma_2^{-1} (B_2^* p + l_2) \quad (11)$$

证明 1) 证明对任给的函数 $v(t) \in L_2$ 和初始状态 $x(0) = x_0$, 下列线性二次型最优控制问题

$$\min_u J[u, v] \quad (12)$$

可解当且仅当 $H_2 \in \text{dom}(\text{Ric})(H_2)$ 见式 (10))。

必要性: 若式 (12) 可解, 应用熟知的 Pontryagin 极大值原理, 存在函数 $\psi(t)$ 使得

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \dot{\psi} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}^* \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \quad (13)$$

对于任意初始状态 $x(0) = x_0$ 有解 $x, \psi \in L_2$, 这里 $\mathbf{H} = \Psi^* (A x + B_1 v + B_2 u + w) - F[x, u, v]$ 。从式 (13) 中第三个式子可得

$$u = \Gamma_2^{-1} (B_2^* \psi - g_2^* x - l_2)$$

将其代入 (13) 的前两个式子得

$$J \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g_1 v + g_2 \Gamma_2^{-1} l_2 - k \\ B_1 v - B_2 \Gamma_2^{-1} l_2 + w \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中矩阵 H_2 见式 (10)。注意到式 (14) 对任意初态 $x(0) = x_0$ 有解 $x, \psi \in L_2$ 当且仅当 (14) 的齐次方程对任意初态 $x(0) = x_0$ 有解 $x, \psi \in L_2$ 。即齐次 ($v = 0, w = 0, l_2 = 0, k = 0$) 线性二次型问题 (12) 对任意初态 $x(0) = x_0$ 可解。由文献 [1] 中定理 2 知 $H_2 \in \text{dom}(\text{Ric})$ 。

充分性: 设 $H_2 \in \text{dom}(\text{Ric}), R_2 = \text{Ric}(H_2)$ 。构造二次型泛函

$$V_2(t, x) = x^* R_2(t)x + 2s^*(t)x + \sigma(t)$$

其中 $s, \sigma \in L_2$ 由下列式子唯一定义

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\bar{B}_2^* s - (R_2 B_1 + g_1)v - R_2 w - k - \bar{r}_2 l_2 \\ \dot{\sigma} &= \rho^* \Gamma_2 \rho - 2s^* B_1 v + v^* \Gamma_1 v - 2s^* w - 2l_1^* v \\ \rho &= -\Gamma_2^{-1}(\bar{B}_2^* s + l_2) \end{aligned} \quad (15)$$

这里, \bar{B}_2, \bar{r}_2 在式(10)中定义。则易证下列恒等式

$$\dot{V}_2 + 2F = |\Gamma_2^{1/2}(u - \bar{r}_2 x - \rho)|^2, \quad \forall x, u$$

成立。由此可得

$$J[u, v] = \frac{1}{2} V_2(0, x_0) + \frac{1}{2} \int_0^T |\Gamma_2^{1/2}(u - \bar{r}_2 x - \rho)|^2 dt$$

所以, 问题(12)可解, 最优控制为

$$u(t, x, v) = \bar{r}_2 x + \rho \quad (16)$$

最优值为

$$\min_u J[u, v] = \frac{1}{2} V_2(0, x_0)$$

2) 注意到关系式

$$J[u(t, x, v), v] = \frac{1}{2} x_0^* R_2(0)x_0 - \frac{1}{2} \int_0^T l_2^* \Gamma_2^{-1} l_2 dt - \Phi[v]$$

$$\Phi[v] = \int_0^T \Phi_t(s(t), v(t)) dt - s^*(0)x_0$$

$$\begin{aligned} \Phi_t(s, v) &= \frac{1}{2} (s^* B_2 \Gamma_2^{-1} B_2^* s - 2s^* B_1 v + \\ &v^* \Gamma_1 v + 2l_2^* \Gamma_2^{-1} B_2^* s - \\ &2w^* s - 2l_1^* v) \end{aligned}$$

考虑线性二次型最优控制问题

$$\min_v \{\Phi[v] \mid (15)\} \quad (17)$$

现证如果问题(17)对于任意 $x_0 \in R^n$ 可解, 则有 $H_1 \in \text{dom}(Ric)$ 。

若(17)可解, 则存在函数 $\xi(t)$ 使得

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \hat{H} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix}^*, \quad \dot{\xi} = -\begin{pmatrix} \hat{H} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix}^*, \quad \frac{\partial \hat{H}}{\partial v} = 0 \quad (18)$$

对于任意 $\xi(0) = -x_0$ 有解 $s, \xi, v \in L_2$, 这里

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\xi^* [\bar{B}_2^* s + (R_2 B_1 + g_1)v + \\ &R_2 w + k + \bar{r}_2 l_2] - \Phi_t(s, v) \end{aligned}$$

注意到式(18)中第二式实际上是式(6)当 u 取控制(16)且 $\xi = -x$ 时的方程, 则(18)可写成

$$\dot{s} = -\begin{pmatrix} \hat{H} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix}^*, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \hat{H} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix}^*, \quad \frac{\partial \hat{H}}{\partial v} = 0 \quad (19)$$

从(18)的第三式解出

$$v = \bar{r}_1 x + \Gamma_1^{-1}(B_1^* s + l_1) \quad (20)$$

将其代入式(19)的前两个式子得

$$J \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = H_1 \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{r}_1 l_1 + \bar{r}_2 l_2 + R_2 w + k \\ B_1 \Gamma_1^{-1} l_1 - B_2 \Gamma_2^{-1} l_2 + w \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中矩阵 H_1 见式(10)。注意到式(21)对任意初态 $x(0) = x_0$ 有解 $x, s \in L_2$ 当且仅当它的齐次方程对任意 $x(0) = x_0$ 有解 $x, s \in L_2$ 。于是, 齐次方程 $J \dot{z} = H_1 z$ 至少存在 n 个线性无关解, 设为

$$z_i = \text{col}[x_i, s_i] \in L_2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

这意味着 H_1 满足频率条件^[1]。设

$$z^0 = \text{col}[x^0, s^0] \in L_2$$

为式(21)相应于 $x(0) = 0$ 的解。定义矩阵

$$X(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]$$

$$S(t) = [s_1(t) \dots s_n(t)]$$

则(21)的任意解 $z = \text{col}[x, s] \in L_2$ 可以表示为

$$x = X(t)c + x^0, \quad s = S(t)c + s^0 \quad (22)$$

容易证明 $\det X(0) \neq 0$ 。进一步, 对任意初态 $x(0) = x_0$, 由式(22)可唯一确定 $c = X^{-1}(0)x_0$, 从而对固定 $x(0) = x_0$, (21)属于 L_2 的解唯一。即问题(17)的最优控制(20)是唯一的。下面证明 $\det X(t) \neq 0 (\forall t \geq 0)$ 。考虑以任意时刻 $t_0 \geq 0$ 为初始时刻的最优控制问题

$$\min_v \{\Phi_0[v] \mid (15)\}$$

$$\Phi_0[v] = \int_{t_0}^T \Phi_t(s(t), v(t)) dt - s^*(t_0)x_0 \quad (23)$$

可以证明若(17)对任意 x_0 存在唯一最优控制, 则问题(23)亦然。事实上, 对任意 $v \in L_2$, 式(15)中第一式的具有性质 $s \in L_2$ 的解可以表示为 $s(t) = (A v)(t) + \tilde{s}(t)$, 其中 A 和 $\tilde{s}(t)$ 分别为

$$A v = -[\bar{X}^*(t)]^{-1} \int_{t_0}^t \bar{X}^*(\tau) [R_2(\tau) B_1(\tau) + g_1(\tau)] v(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= -[\bar{X}^*(t)]^{-1} \int_{t_0}^t \bar{X}^*(\tau) [R_2(\tau) w(\tau) + \\ &k(\tau) + \bar{r}_2(\tau) l_2(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

$\bar{X}(t)$ 为 $\dot{x} = \bar{B}_2 x$ 的基础解矩阵。于是, 可将泛函 $\Phi_0[v]$ 表示成抽象形式

$$\Phi_0[v] = -\frac{1}{2} [(G_{t_0} v, v) + 2(g_{x_0, t_0}, v)] + \tilde{c}$$

这里 G_{t_0} 为一自共轭有界线性算子, $g_{x_0, t_0} \in L_2, \tilde{c}$ 为常数(此处略去其具体表达式)。由引理 2, 即可从(17)对任意 x_0 存在唯一最优控制导出(23)亦对任意 x_0 存在唯一最优控制。于是, 类似于问题(17)可得 $\det X(t_0) \neq 0$ 。综合上述有 $H_1 \in \text{dom}(Ric)$ 。

3) 证明如果 $H_1 \in \text{dom}(Ric)$, 则(17)对任意 x_0

可解

设 $R_1 = Ric(H_1), R_2 = Ric(H_2), R = R_2 - R_1$, 则可证 R 是 Riccati 方程

$$\frac{dR}{dt} = [I_n \quad -R]H \begin{bmatrix} I_n \\ -R \end{bmatrix}$$

的镇定解. 这里

$$H = \begin{bmatrix} -G + g_2 \Gamma_2^{-1} g_2^* - g_1 \Gamma_1^{-1} g_1^* & (A - B_2 \Gamma_2^{-1} g_2^* + B_1 \Gamma_1^{-1} g_1^*)^* \\ A - B_2 \Gamma_2^{-1} g_2^* + B_1 \Gamma_1^{-1} g_1^* & B_2 \Gamma_2^{-1} B_2^* - B_1 \Gamma_1^{-1} B_1^* \end{bmatrix} \quad (24)$$

构造函数 $V(t, x) = x^* R(t)x + 2p^*(t)x + q(t)$, 则易验证恒等式

$$\dot{V} + 2F = \left| \Gamma_2^{1/2} (u - r_2^* x - \rho_2) \right|^2 - \left| \Gamma_1^{1/2} (v - r_1^* x - \rho_1) \right|^2$$

其中 $p(t), q(t), r_i(t), \rho_i(t) (i = 1, 2)$ 定义在式(10)和(11)中. 于是

$$J[u, v] = \frac{1}{2} V(0, x_0) + \frac{1}{2} \int_0^L \left| \Gamma_2^{1/2} (u - r_2^* x - \rho_2) \right|^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^L \left| \Gamma_1^{1/2} (v - r_1^* x - \rho_1) \right|^2 dt \quad (25)$$

令 $u^0 = r_2^* x + \rho_2, v^0 = r_1^* x + \rho_1$, 则有不等式

$$J[u^0, v] \leq J[u^0, v^0] \leq J[u, v^0]$$

另一方面, 对于任意的 $v \in L_2$, 问题(12)存在最优控制(16), 即有

$$J[u(t, x, v), v] \leq J[u^0, v] \leq J[u^0, v^0] \quad (26)$$

且由式(25)又可得 $J[u(t, x, v^0), v^0] \leq J[u^0, v^0]$, 结合式(26)知问题 $\max_v J[u(t, x, v), v]$ 可解, 其解为 v^0 . 亦即问题(17)可解, 且有

$$u(t, x, v^0) = u^0, \quad L = J[u^0, v^0] = \frac{1}{2} V(0, x_0)$$

定理得证. (证毕)

类似地可得出局中人 u 的保性能对策问题的解. 此外, 从上述定理证明中还可得出如下结论:

定理2 如果局中人 v 或 u 的保性能对策问题可解, 则鞍点对策问题可解, 并且最优保性能策略与最坏干扰恰好构成一个鞍点, 而下值或上值即为对策值.

定理3 如果式(24)中矩阵 H 属于 $\text{dom}(Ric)$, 则鞍点对策问题可解, 鞍点为

$$u^0 = r_2^* x + \rho_2, \quad v^0 = r_1^* x + \rho_1$$

对策值为 $\frac{1}{2} x_0^* R(0)x_0 + p(0)^* x_0 + \frac{1}{2} q(0)$. 其中,

$R = Ric(H), r_i(t), \rho_i(t) (i = 1, 2), p(t), q(t)$ 参见式(10)和(11).

定理4 如果 $G = C^*C, g_2 = 0, (A, B_2)$ 为 L_2 -能稳, (A, C) 为 L_2 -能检, 则下列断言等价:

- 1) 局中人 v 的保性能对策问题可解;
- 2) $H_2 \in \text{dom}(Ric), H_1 \in \text{dom}(Ric)$;
- 3) $H \in \text{dom}(Ric)$;
- 4) 鞍点问题可解.

4 微分对策应用于H控制问题

考虑如下受控对象

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_1(t)v + B_2(t)u \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (27)$$

和受控输出

$$z = C(t)x + D(t)u \quad (28)$$

其中, $x \in R^n$ 为状态, $u \in R^m$ 为控制, $v \in R^l$ 为干扰, 矩阵 $A(t), B_1(t), B_2(t), C(t), D(t)$ 具适当维数且其元素为 T 周期实连续函数.

H 控制问题 对于给定的实数 $\gamma > 0$, 寻找周期时变线性状态反馈 $u = K(t)x$, 使得闭环系统对某个小的实数 $\epsilon > 0$ 和某个半正定函数 $N(x) (N(0) = 0)$ 成立不等式

$$\begin{aligned} z^2 &\leq (\gamma^2 - \epsilon) v^2 + N(x_0) \\ \forall x_0 \in R^n, \forall v \in L_2 \end{aligned}$$

如果这样的控制存在, 则说完全信息条件下的 H 控制问题可解.

假定 (A1) (A, B_1) 和 (A, B_2) 为 L_2 -能稳;

(A2) (A, C) 为 L_2 -能检测;

(A3) $D^*C = 0, D^*D = I_m$.

假定中(A1)和(A2)是必要的, 而(A3)仅仅为了叙述的方便.

记号

$$H_2 = \begin{bmatrix} -C^*C & A^* \\ A & B_2 B_2^* \end{bmatrix}$$

$$R_2 = Ric(H_2)$$

$$M_\gamma = B_2 B_2^* - \gamma^2 B_1 B_1^*$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \gamma^2 R_2 B_1 B_1^* R_2 & (A - M_\gamma R_2)^* \\ A - M_\gamma R_2 & -M_\gamma \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -C^*C & A^* \\ A & M_\gamma \end{bmatrix}$$

(下转第 708 页)

2) 当右端能力约束严重不足时, 即 $b_i < \frac{2}{3} \sum_j a_{ij}$ 时, 利用实际问题的系数矩阵的特殊性, 采用启发式算法求解(P), 以便减少计算时间, 提高工作效率。

5 仿真研究

下面给出一个现场问题的数据(表1)及几种算法的仿真结果(表2)。其中表1只给出准发个数及模型中的变量数和结果。

编制算例的运算环境:

硬件: PC 微机(P II/350, 64M, 6.4G)。

软件: SA S (Statistic Analysis System), 其中分

表1 实际问题数据

数据组别	变量数 m	约束个数 n
一组	1 371	144
二组	1 371	144

表2 计算结果

组别	目标值	解性质	运算时间	结论
一组	209 291	可行解	约 20 s	可用
二组	207 362	可行解	约 20.5 s	可用

支定界算法为 SA S 软件提供的。

通过上述结果可得如下结论:

1) 针对转库流向优化问题而建立的数学模型符合实际情况, 能很好地体现实际现场情况和用户的需求。

2) 对数学模型的求解和处理符合现场要求。就目前系统上线运行的效果而言, 满足了用户的需求。

参考文献:

[1] C H Papadimitriou, K Steiglitz 组合最优化算法和复杂性[M]. 刘振宏, 蔡茂诚译. 北京: 清华大学出版社, 1988

[2] S Marthlo, D Pisinger, P Toth. New trends in exact algorithm for 0-1 knapsack problem [J]. European J of Operational Research, 2000, 123(2): 325-332

[3] 王梦光, 刘士新, 黄敏. 资源受限工程调度问题的最新发展[J]. 控制与决策, 1996, 11(增): 105-112

[4] 唐焕文, 秦学志, 王雪华. 大系统优化算法有效算法的研究[J]. 系统工程学报, 1997, 12(1): 1-8

[5] S Saihi. A perturbation heuristic for a class of location [J]. J of Operation Research Soc, 1997, (48): 1233-1240

(上接第 704 页)

定理 5 设(A1) ~ (A3) 满足, 则完全信息条件下的 H 控制问题可解当且仅当下列条件之一成立:

1) $H \in \text{dom}(Ric)$, 2) $H \in \text{dom}(Ric)$

所求控制 $u = -B^{-1}R^{-1}x$, 这里 $R = Ric(H)$ 。

证明 可以证明完全信息条件 H 控制问题等价于 $\max_u \min_v J[u, v]$ 对策问题 $\max_u \min_v J[u, v]$, 这里 $J[u, v] = \int_0^{\infty} (z^T - \gamma^2 v^T) dz$ 。由定理 4 即得。

参考文献:

[1] Yakubovich V A. Linear-quadratic optimization problem and frequency theorem for periodic systems [J]. Siberian Math J, 1986, 27(4): 181-200

[2] De Souza C E. Riccati differential equation in optimal

filtering of periodic non-stabilizable systems [J]. Int J Control, 1987, 42(6): 1235-1250

[3] Yakubovich V A, Starzhinskii V M. Linear differential equations with periodic coefficients [M]. New York: Wiley, 1975

[4] Hwer G A. Periodicity, detectability and the matrix Riccati equation [J]. SIAM J J Contr and Optim, 1975, 13(7): 1235-1251

[5] Basar T, Bernhard P. H^{∞} -optimal control and related minmax design problems: A dynamic game approach [M]. Boston: Birkhauser, 1995

[6] Limebeer D J N, Anderson B D O, Khargonekar P P et al. A game theoretic approach to H^{∞} control for time-varying systems [J]. SIAM J Contr and Optim, 1992, 30(2): 262-283