

文章编号: 1001-0920(2001)0S-0665-04

广义预测控制中闭环系统稳定新的充分条件

师五喜, 霍伟, 毕树生, 宗光华
(北京航空航天大学 第七研究室, 北京 100083)

摘要: 基于被控对象的离散差分方程推导出广义预测控制中闭环系统特征多项式的阶数, 然后给出一个新的保证闭环系统稳定的充分条件。

关键词: 广义预测控制; 特征多项式; 稳定性

中图分类号: TP 273 **文献标识码:** A

New Sufficient Condition for Closed-loop System Stability in Generalized Predictive Control

SHI Wu-xi, HUO Wei, BI Shu-sheng, ZONG Guang-hua

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Based on the discrete-time difference equation of plant, the order of the characteristic polynomial of the closed-loop system in generalized predictive control is derived. A new sufficient condition for closed-loop system stability is presented.

Key words: generalized predictive control; characteristic polynomial; stability

1 引言

自 Clarke 等^[1,2] 提出广义预测控制(GPC) 算法以来, 由于该算法具有模型参数少, 对扰动、随机噪声、时滞变化等有较强的鲁棒性等特点, 使其在工业过程控制中得到了成功的应用。但由于不易找出可调参数(预测时域、控制时域和加权因子) 与稳定性之间的显式关系, 所以广义预测控制方法的闭环稳定性分析较为困难。文献[2] 基于状态方程给出了广义预测控制的几个稳定性定理, 但其可调参数的选择比较特殊; 文献[3] 针对一类简单广义预测控制方法, 给出了闭环系统稳定的一个定理, 但此定理仅能对被控对象开环稳定、控制时域为 1 的广义预测控

制方法加以检验; 而文献[4] 则针对单值广义预测控制方法, 给出了闭环系统稳定的定理, 但其仅适用于预测时域只取一步、控制时域为 1 的广义预测控制。

本文基于被控对象的离散差分方程, 推导出一般广义预测控制方法中闭环系统特征多项式的阶数, 然后推导出用被控对象参数表示的便于应用的闭环系统稳定新的充分条件。

2 问题描述

被控对象采用如下的离散差分方程^[1]

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})w(t)/\Delta \quad (1)$$

收稿日期: 2001-03-04; 修回日期: 2001-04-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(59975002)

作者简介: 师五喜(1964—), 男, 甘肃秦安人, 博士生, 从事预测控制和模糊预测控制等研究; 霍伟(1951—), 男, 湖北武昌人, 教授, 博士生导师, 从事非线性动力学系统控制及智能控制研究。

其中, $\{u(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 分别表示被控对象的输入和输出, $\{w(t)\}$ 是随机变量序列, $\Delta = 1 - z^{-1}$ 表示差分算子,

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nbz^{-n} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_nz^{-n} \end{aligned}$$

由文献[1]知, 广义预测控制律可表示为

$$\Delta u(t) = P^T \left[Y_r - \frac{F}{C(z^{-1})} y(t) - \frac{H}{C(z^{-1})} \Delta u(t-1) \right] \quad (2)$$

式中, $P^T = [p_1, \dots, p_N]$ 是 $(G^T G + M)^{-1} G^T$ 的第一行; G, Y_r, F, H 见文献[1]。将式(2)代入式(1), 利用 Diophantine 方程可得闭环系统方程为

$$T(z^{-1})y(t) = z^{-1}B(z^{-1})C(z^{-1})P^T Y_r + [C(z^{-1}) + z^{-1}P^T H]C(z^{-1})w(t)$$

其中

$$\begin{aligned} T(z^{-1}) &= C(z^{-1}) \{ A(z^{-1}) \Delta + \\ &\quad \sum_{j=1}^N z^{j-1} p_j [B(z^{-1}) - \\ &\quad G_j(z^{-1})A(z^{-1}) \Delta] \} \end{aligned} \quad (3)$$

令

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1}) \Delta + \sum_{j=1}^N z^{j-1} p_j [B(z^{-1}) - G_j(z^{-1})A(z^{-1}) \Delta] \quad (4)$$

因为 $C(z^{-1})$ 的零点一般在单位圆内, 由式(3)知, 要使闭环系统稳定, 则要求 $T(z^{-1})$ 的零点在单位圆内即可。

3 闭环系统特性分析

为便于研究, 令 $n = \max\{n_a + 1, n_b + 1, n_c\}$, 记

$$\begin{aligned} A(z^{-1})\Delta &= 1 + \bar{a}_1z^{-1} + \dots + \bar{a}_nz^{-n} \\ \bar{B}(z^{-1}) &= \bar{b}_0 + \bar{b}_1z^{-1} + \dots + \bar{b}_{n-1}z^{-(n-1)} \\ \bar{C}(z^{-1}) &= 1 + \bar{c}_1z^{-1} + \dots + \bar{c}_nz^{-n} \end{aligned}$$

其中

$$\bar{a}_i = \begin{cases} a_1 - 1, & i = 1 \\ a_i - a_{i-1}, & 2 \leq i \leq n_a \\ -a_{n_a}, & i = n_a + 1 \\ 0, & i > n_a + 1 \end{cases}$$

$$\bar{b}_i = \begin{cases} b_i, & 0 \leq i \leq n_b \\ 0, & i > n_b \end{cases}$$

$$\bar{c}_i = \begin{cases} c_i, & 1 \leq i \leq n_c \\ 0, & i > n_c \end{cases}$$

则有如下引理(以下推导中约定 $\bar{a}_0 = 1$):

引理 1^[3] 离散差分方程模型(1)的状态空间能观标准型描述为

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \bar{A}x(t) + \bar{b}\Delta u(t) + \bar{g}w(t) \\ y(t) &= \bar{c}^T x(t) + w(t) \end{aligned}$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{a}_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{a}_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 - \bar{a}_1 \\ \bar{c}_2 - \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{c}_n - \bar{a}_n \end{bmatrix}$$

引理 2 以上的 \bar{a}_i 和 \bar{b}_i 满足

$$\begin{cases} \bar{b}_i = \sum_{k=0}^i \bar{a}_{i-k} g_k, & 0 \leq i \leq n-1 \\ \sum_{k=i-n}^i \bar{a}_{i-k} g_k = 0, & n \leq i \leq n+N-1 \end{cases} \quad (5)$$

其中 g_0, g_1, \dots 是被控对象阶跃响应系数。

证明 取

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{c}^T \\ \bar{c}^T \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{c}^T \bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad R_{\bar{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

容易证明^[5] $R_{\bar{a}} \Phi = I$ 。又由引理 1 知, 被控对象的阶跃响应系数 g_0, g_1, \dots 满足 $g_i = \bar{c}^T \bar{A}^i \bar{b}, i = 0, 1, \dots$, 因此

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = \Phi \bar{b}$$

所以

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = \bar{b} \quad (6)$$

由式(6)知, 当 $0 \leq i \leq n-1$ 时, $\bar{b}_i = \sum_{k=0}^i \bar{a}_{i-k} g_k$ 。

当 $n \leq i \leq n+N-1$ 时, 利用 Cayley-Hamilton 定理, 由矩阵 \bar{A} 的特征多项式可证结论亦成立。(证

毕)

引理 3 对于闭环系统特征多项式 $T(z^{-1})$, 有

$$\deg T(z^{-1}) = \begin{cases} \max\{n_a + 1, n_b + 1, n_c\} + n_e, & \lambda > 0 \\ \max\{n_a + 1, n_b + 1, n_c\} + n_e - 1, & \lambda = 0 \end{cases}$$

证明 由于

$$\begin{aligned} & z^{j-1} [B(z^{-1}) - G_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta] = \\ & z^{j-1} \left[\sum_{i=0}^{j-1} \left(\bar{b}_i - \sum_{k=0}^i \bar{a}_{i-k} g_k \right) z^{-i} + \right. \\ & \left. \sum_{i=j}^{n-1} \left(\bar{b}_i - \sum_{k=0}^{j-1} \bar{a}_{i-k} g_k \right) z^{-i} - \right. \\ & \left. \sum_{i=n}^{n+N-1} \sum_{k=i-n}^{j-1} \bar{a}_{i-k} g_k z^{-i} \right] \end{aligned}$$

由式(5) 知上式可以写成

$$\begin{aligned} & z^{j-1} [B(z^{-1}) - G_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta] = \\ & g_j z^{-1} + (\bar{a}_1 g_j + g_{j+1}) z^{-2} + \dots + \\ & \sum_{i=j}^n \bar{a}_{n-i} g_i z^{-(n-j+1)} + \\ & \sum_{i=j}^{n+1} \bar{a}_{n-i+1} g_i z^{-(n-j+2)} + \dots + \\ & \sum_{i=j}^{n+j-1} \bar{a}_{n+j-i-1} g_i z^{-(n-j+N)} \end{aligned} \quad (7)$$

当 $j = 1, 2, \dots, N$ 时, 将式(7) 代入式(4), 经整理后得

$$\begin{aligned} \bar{T}(z^{-1}) = & 1 + (\bar{a}_1 + M_1)z^{-1} + \\ & (\bar{a}_2 + M_2)z^{-2} + \dots + (\bar{a}_n + M_n)z^{-n} \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} M_i = & [\bar{a}_{i-1} \quad \bar{a}_{i-2} \quad \dots \quad \bar{a}_{i-n}] \times \\ & \begin{bmatrix} g^1 & g^2 & \dots & g^N \\ g^2 & g^3 & \dots & g^{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^n & g^{n+1} & \dots & g^{n+N-1} \end{bmatrix} P \\ & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

当 $i < k$ 时, $\bar{a}_{i-k} = 0$. 又由式(5) 知

$$M_n = -a_n [g^0, \dots, g^{N-1}] P \quad (9)$$

而当 $\lambda = 0$ 时, $[g^0, \dots, g^{N-1}] P = 1$, 代入式(9) 得 $\bar{a}_n + M_n = 0$. 再由式(3) 知引理结论成立。(证毕)

定义向量 $\alpha < \beta$, 当且仅当 α 中的元素小于 β 中的对应元素, 则有如下定理:

定理 1 当 $\lambda > 0$ 且

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{A} \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ \bar{A} \end{bmatrix} \right\} \Psi P < \begin{bmatrix} 1 - \bar{a}_1 \\ \bar{a}_1 - \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_{n-1} - \bar{a}_n \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

成立时, 广义预测控制律(2) 使闭环系统稳定, 其中 $\Psi = [\bar{b} \quad \bar{A} \quad \bar{b} \quad \dots \quad \bar{A}^{N-1} \bar{b}]$.

证明 由式(8) 知, 当

$$\begin{aligned} & 1 > \bar{a}_1 + M_1 > \bar{a}_2 + M_2 > \\ & \dots > \bar{a}_n + M_n > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

成立时, $T(z^{-1})$ 的所有零点都在单位圆内^[6]. 而式(11) 等价于下式

$$A_p D_g P < \begin{bmatrix} 1 - \bar{a}_1 \\ \bar{a}_1 - \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_{n-1} - \bar{a}_n \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} A_p = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1 - 1 & 1 & \dots & 0 \\ \bar{a}_2 - \bar{a}_1 & \bar{a}_1 - 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n-1} - \bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-2} - \bar{a}_{n-3} & \dots & 1 \\ -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_{n-2} & \dots & -1 \end{bmatrix} \\ D_g = & \begin{bmatrix} g^1 & g^2 & \dots & g^N \\ g^2 & g^3 & \dots & g^{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^n & g^{n+1} & \dots & g^{n+N-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

考虑到 $A_p = \begin{bmatrix} R_a \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ R_a \end{bmatrix}$, $D_g = \Phi \bar{A} \Psi$ (其中 R_a 和 Φ 的定义见引理 2 证明), $\Psi = [\bar{b} \quad \bar{A} \quad \bar{b} \quad \dots \quad \bar{A}^{N-1} \bar{b}]$, 且 $R_a \Phi = I$, 所以

$$\begin{aligned} A_p D_g = & \left\{ \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} \right\} \bar{A} \Psi = \\ & \left\{ \begin{bmatrix} \bar{A} \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ \bar{A} \end{bmatrix} \right\} \Psi \end{aligned}$$

将上式代入式(12) 知定理结论成立。(证毕)

定理 2 当 $\lambda = 0$ 且

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{A} \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ \bar{A} \end{bmatrix} \right\} \Psi P < \begin{bmatrix} 1 - \bar{a}_1 \\ \bar{a}_1 - \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_{n-2} - \bar{a}_{n-1} \\ \bar{a}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

成立时,广义预测控制律(2)使闭环系统稳定,其中

\bar{A} 是 A 的前 $n-1$ 行。

证明略(类似于定理1证明)。

推论1 当 $\lambda=0, N_u=N$ 时,若 $B(z^{-1})$ 稳定,则闭环系统稳定。

证明略。

4 例子

设被控对象为

$$y(t) = 0.7y(t-1) + 0.9u(t-1) + 0.6u(t-2) + w(t)/\Delta$$

对于此系统

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 1 \\ -0.7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) 取设计参数 $N=3, N_u=2, \lambda=0.1$, 则得

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0.9 & 2.13 & 2.991 \\ 0.6 & -0.63 & -1.491 \end{bmatrix}$$

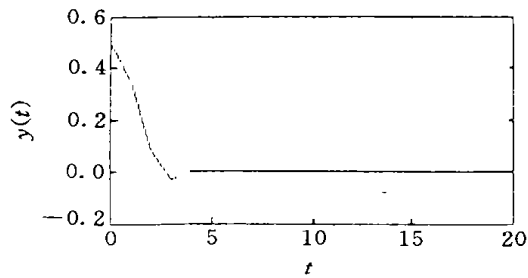


图1 输出 $y(t)$

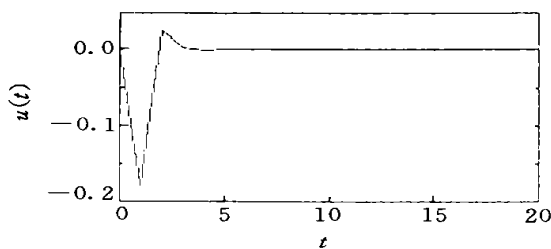


图2 控制 $u(t)$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5049 \\ 0.4267 \\ -0.1402 \end{bmatrix}$$

经验证式(10)成立,由定理1知此时的控制律可保证闭环系统稳定。

为说明定理1的有效性,图1和图2分别给出了参考序列 $y_r(t)=0$ 和 $w(t)=0$ 时输出 $y(t)$ 和控制 $u(t)$ 的仿真图,从图中可以看出,输出能很快地跟踪参考序列。

2) 取设计参数 $N=3, N_u=2, \lambda=0$ 和 $N=N_u, \lambda=0$, 同样可验证其分别满足定理2和推论1的条件,此时的控制律亦可保证闭环系统稳定。

对于上述例子,如果根据文献[2]中定理,则均不能判断以上各情况闭环系统的稳定性。

5 结论

本文推导出被控对象用离散差分方程表述时,广义预测控制中闭环系统特征多项式的阶数,然后推导出一个新的保证闭环系统稳定的充分条件。

参考文献:

- [1] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control, Part I and Part II [J]. Automatica, 1987, 23(2): 137-160.
- [2] Clarke D W, Mohtadi C. Properties of generalized predictive control [J]. Automatica, 1989, 25(6): 859-875.
- [3] Scattolini R, Bittanti S. On the choice of the horizon in long-range predictive control—Some simple criteria [J]. Automatica, 1990, 26(5): 915-917.
- [4] 郑海涛, 袁璞. 广义预估控制的稳定性研究 [J]. 自动化学报, 1993, 19(4): 493-496.
- [5] Chen Ch T. Linear system theory and design [M]. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [6] 席裕康. 预测控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.