文章编号: 1001-0920(2002)01-0041-04

基于改进遗传算法的时间最优控制问题求解

曾 进[1], 任庆生[2]
(1.上海交通大学 应用数学系,上海 200030;2.上海交通大学 计算机科学与工程系,上海 200030)

摘 要: 对原有遗传算法的不足进行分析,提出改进的遗传算法。对于高维 高精度问题,改进算法相对原算法可节省大量存储空间和解码时间。提出的选择算子仅与父代的大小顺序有关,既可避免原算法对适应值必须为正的限制,又可避免算法过早收敛到局部解。证明了新算法的全局收敛性,并对新的选择算子进行了性能分析。将改进的遗传算法引入受约束时间最优控制问题的求解,获得了令人满意的结果。

关键词: 时间最优控制; 约束最优控制; 遗传算法
中图分类号: O 232 文献标识码: A

Time-optimal control based on improved genetic algorithm

ZENG Jin[1], *REN Qing-sheng*[2]
(1. Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China; 2. Department of Computer Science and Eingineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: As a global searching algorithm, the basic frame of genetic algorithm is formed. The coding technique is improved by constructing the chromosome directly using the original variables, and a new selection operator is presented. The new selection operator can avoid the convergence to local solution in some sense. The global convergence is proved when the new algorithm used to solve the optimization problem on a bounded and closed domain. The algorithm is also used to solve constrained time-optimal control problems. The numerical example shows its advantage.

Key words: time-optimal control; constrained optimal control; genetic algorithm

1 引 言

时间最优控制是工程实践中经常遇到的一类最优控制问题,例如惯性导航系统中的快速对准问题,导弹控制中的快速转接问题等。如果控制变量不受任何约束或控制为容许控制,则可借助于古典变分法及庞特里雅金极大值原理进行讨论。但在许多实际问题中,如燃气轮机快速加载问题,控制不仅受约束,而且是受状态约束,对于这类时间最优控制问题,上述方法则很难适用。目前对约束最优控制问题,一个较好的解决办法是利用罚函数方法将约束最优控制问题转化为无约束最优控制问题。对无约束最优化问题,传统算法有多种,如梯度法(最速下降法)、牛顿法及其各种变形、共轭梯度法、变尺度法(包括 DFP 法、Pearson 法)、Powell 法等,但这些传统算法只能求解局部解。此外,对受约束最优控制问

收稿日期: 2000-09-14; 修回日期: 2001-01-05
基金项目: 国家自然科学基金项目(59876021);上海交通大学博士启动基金项目(A987011)
作者简介: 曾进(1970—),女,湖南湘乡人,副教授,博士,从事数值计算和最优控制研究;任庆生(1972—),男,江苏无锡人,副教授,博士,从事计算智能与图像处理研究。

题，需要结合罚函数法共同求解。而罚函数法一般要求惩罚因子趋于无穷，此时若采用某些传统算法，则易产生病态问题，这进一步限制了传统算法的应用。

针对上述问题，本文将遗传算法引入时间最优控制问题。与传统的优化算法相比，遗传算法是一种高度并行、随机、自适应全局搜索算法，由于它只需了解函数值，而不需导数等信息，所以在结合罚函数法求解受约束最优控制问题时，惩罚因子直接取很大的值也不会产生病态问题，从而大大减少了计算量。鉴于遗传算法计算速度慢和存储量大等缺点，本文提出了改进的遗传算法，并讨论了新算子的性能及新遗传算法的收敛性。将其与传统最优化方法相结合，集中二者各自的优点，能以较大概率快速收敛到全局最优解。具体数值结果显示了遗传算法在受状态约束时间最优控制求解中的可行性。

2 改进的遗传算法

2.1 传统二元型遗传算法的不足

通常使用的遗传算法的基本过程参见文献[1～3]。虽然目前该算法已被广泛应用，并取得了一定成果，但我们经过研究认为它仍存在一些不足之处：

1) 用二进制数进行编码，在求解多维高精度问题时需要占用大量存储空间，且在解码上消耗过多的时间，使计算性能下降。

2) 选择算子的不合理性：① 标准的选择算子要求适应值函数大于 0，对于实际的目标函数，其值域无法预知，从而无法事先确定能使函数值为正的转换函数，而转换函数的选择对算法性能也有很大影响；② 在基于适应值比例的选择下，一个具有很高适应值的个体很容易大量繁殖，而其它个体则被淘汰，这时参加交叉运算的两个个体相同的可能性大，因此很难生成新个体，而变异算子生成的个体即使适应值更高，但由于数量少，所以被淘汰的概率仍然很大，从而导致过早收敛到局部解；③ 如果群体中各个染色体的适应值相差不大，则它们后代的个数也会基本相同，好的个体得不到更多繁殖的机会，从而使算法的收敛速度变慢。

3) 算法的随机性过强，缺乏相应的下降指导原则，使得算法的收敛速度过慢。

由上面的分析，我们认为有必要对染色体的编码方式进行推广，直接利用原始变量来构成染色体，并在不影响算法全局收敛性的条件下，提出相应的具有一定指导原则的新算子。这种改进的算法具有表示方法自然直观、节约存储空间、计算速度快等优点。

2.2 改进的遗传算法描述

2.2.1 染色体表示形式

本文直接采用原始变量来构成染色体 $x_1x_2\cdots x_n$，它由 n 个基因组成，每个基因 x_i 代表一个变量，该染色体则代表问题定义域的一个点。

2.2.2 适应值函数

本文直接利用目标函数作为适应值函数，对其值域不作任何要求。

2.2.3 遗传算子

本文采用的基本算子如下：

1) 选择算子：由于此时适应值函数可能小于 0，因此不能采用原来基于适应值比例的选择算子。本文采用如下的选择算子：

① 从上一代群体中等概率选取 q 个染色体；

② 在这 q 个染色体中选择最好的置于下一代群体；

③ 重复以上各步，直至下一代群体中包含同样多的染色体。

对于这种选择算子，一个染色体被选择的概率只取决于它在群体中的大小顺序，该染色体适应值比其它染色体大多少或小多少不会影响其后代数量，从而在一定程度上避免了经选择后染色体过于集中的情况。

2) 交叉算子：可采用如下交叉算子：

① 一点交叉算子：若有染色体 $a_1a_2\cdots a_n$ 和 $b_1b_2\cdots b_n$ 被选中参加交叉，等概率随机选取交叉位置为 j，则交叉后新染色体为 $a_1\cdots a_jb_{j+1}\cdots b_n$ 和 $b_1\cdots b_ja_{j+1}\cdots a_n$；

② 线段搜索算子：若有染色体 x 和 y 被选中参与交叉，则在 x 和 y 之间连一条直线，并在这条直线上随机选取一点作为下一代。

这两种交叉算子的使用应结合具体问题的定义域结构综合考虑，亦可根据具体问题的解空间特点来定义新的交叉算子。

3) 变异算子：

① 完全随机变异算子：若有基因 a_j 被选中发生变异，则新基因为 $\tilde{a}_j$，$\tilde{a}_j$ 随机地取定义域内任一数值；

② 随机方向变异算子：以被选中的染色体为起点，随机产生一个方向，并沿此方向寻找最优点作为新的染色体；

③ Powell 变异算子: 以被选中的染色体为起点, 进行 i 步 Powell 寻优, 并以找到的该染色体作为新的染色体。

后两种变异算子均具有局部寻优的特点, 为加快算法的寻优速度, 宜在算法的初始阶段使用, 或初期使用较大的变异率, 但随着演化代数的增加, 其变异率将逐步降至 0。

2.3 改进遗传算法的收敛性分析

作为一种数值算法, 其收敛性是最基本的性质之一。对于传统的二元型遗传算法, 其全局收敛性已有证明[4]。下面给出应用于求解有界闭定义域上函数全局最优解的改进遗传算法的收敛性分析。

设问题为

$$\min_{x \in D} f(x) \tag{1}$$

其中定义域 D 为 R^n 中一有界闭集, 全局最优解集为 F。

定义 1 $\forall \epsilon > 0$, 若对改进的遗传算法求得的解 $\tilde{x}$, $\exists x^* \in F$, 使得

$$\left| f(\tilde{x}) - f(x^*) \right| < \epsilon \tag{2}$$

则称算法得到了全局最优解。

定理 1 如果: 1) $f(x)$ 是连续函数; 2) 在改进遗传算法的运算过程中保留所获得的最好解。则随着演化代数趋向于无穷, 算法将得到全局最优解。

证明　由于 $f(x)$ 是连续函数, 定义域 D 为有界闭集, 因此有 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, x' \in D$。当 $|x' - x| < \delta$ 时, 有

$$\left| f(x') - f(x) \right| < \epsilon \tag{3}$$

对定义域 D 内每一点 x, 构造开集

$$T(x, \epsilon) = \{x' \mid |x' - x| < \delta\} \tag{4}$$

令 $T = \bigcup_{x \in D} T(x, \epsilon)$, 则 T 为定义域 D 的一个开覆盖。由 Heine-Borel 开覆盖定理, 存在 T 的有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^{m} T_i$, $D \subset \bigcup_{i=1}^{m} T_i$, 其中 T_i 为某一 $T(x, \epsilon)$。令 $Q_1 = T_1 \cap D$, $Q_i = (T_i \cap D) \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} Q_j)$, $i > 1$, 则 $\bigcup_{i=1}^{m} Q_i = D$, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, 即 $\{Q_i\}$ 构成定义域 D 的一个互不相交的覆盖。

对所讨论问题, 每个染色体 $x_1x_2\cdots x_n$ 代表了点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则 $\exists Q_i$ 使得 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in Q_i$, 因此可用 Q_i 来表示染色体 $x_1x_2\cdots x_n$。

通过上面的过程, 本文将原来的连续空间离散为有限个区间, 然后根据文献[4]对二元型遗传算法收敛性的证明, 可知随着演化代数趋向于无穷, 遗传算法将得到全局最优解, 且与初始分布无关。□

定理 2 如果: 1) $f(x)$ 有界; 2) 在改进遗传算法的运算过程中保留所获得的最好解。则随着演化代数趋向于无穷, 算法将得到全局最优解。

与定理 1 证明相似, 此略。

2.4 新选择算子的性能分析

设群体规模为 N, 并设问题为一最小化问题。为讨论方便, 将这 N 个染色体按适应值从小到大的顺序排列为 $x_1, x_2, \cdots, x_N$。从这 N 个染色体中等概率抽取 q 个(允许重复, 否则染色体 $x_{N-(q-2)} \cdots x_N$ 将永远不能出现在下一代), 则可能的情况共有 C_{N+q-1}^{q} 种。在这 q 个个体中选择最优的个体, x_k 为该最优个体的情况共有 $C_{N-(k-1)+(q-1)-1}^{q-1}$ 种, 因此其概率为

$$P(x_k) = \frac{C_{N-(k-1)+(q-1)-1}^{q-1}}{C_{N+q-1}^{q}} = \frac{C_{N-k+q-1}^{q-1}}{C_{N+q-1}^{q}} \tag{5}$$

可见, 这种选择算子与染色体具体适应值的大小关系不很密切, 后代的个数只与其父代的大小顺序有关, 而该染色体适应值比群体适应值大多少或小多少并无联系, 这样就避免了因某一染色体适应值过高而导致下一代该染色体过多的情况, 也避免了群体中各个染色体适应值相差不大而导致优秀个体得不到足够后代的情况。这种新的选择算子既能使好的个体得到较多繁殖的机会, 又能防止其繁殖过多的个体, 因此更具合理性。在使用过程中, 可根据当前群体的具体情况适当调整 q 的取值, 从而影响染色体后代的个数, 因此这种选择算子又有一定的灵活性。

改进的遗传算法对原算法的编码方式进行改进, 并证明这种改进并不改变算法的收敛性。对于高维、高精度问题, 相对原算法可节省大量存储空间和解码时间。新提出的选择算子仅与父代的大小顺序有关, 既可避免原算法对适应值必须为正的限制, 又可避免算法过早收敛到局部解。而某些变异算子则提供了相应的下降指导原则, 使得算法可在某种程度上加快收敛速度。

3　用改进的遗传算法求解受约束的时间最优控制问题

对控制受约束的时间最优控制问题(CP), 求 $u \in U(x, u)$ 及 $T = T(u(\cdot)) \in (0, +\infty)$, 使得

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T \mathrm{d}t = T(u(\cdot)) \tag{6}$$

最小。它满足运动方程

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{7}$$

及初始条件

$$x(0) = x_0 \tag{8}$$

终端约束为

$$x(T) = x_T \tag{9}$$

控制约束为

$$g(x(t,u(\cdot)),u(t)) < 0 \tag{10}$$

用罚函数方法将其转化为一系列无约束最优控制问题$(\mathrm{UPE})_{k,N}$, $k = 1,2,\cdots,N = 1,2,\cdots$。即求 $u_{k,N} \in U$ 及 $T_{k,N} = T(u_{k,N}(\cdot)) \in (0, +\infty)$, 使得

$$\begin{aligned} &J_{k,N}(u(\cdot)) = \\ &T_{k,N} + N\Big(\left|x(T_{k,N},u(\cdot)) - x_T\right| + \\ &\Big[\int_0^{T_{k,N}} g_+(x(t,u(\cdot)),u(t))^{2k}\mathrm{d}t\Big]^{1/2k}\Big) \end{aligned} \tag{11}$$

为最小, 同时它也满足运动方程(7) 及初始条件(8)。这里

$$g_+(x(t,u(\cdot)),u(t)) = \begin{cases} g(x(t,u(\cdot)),u(t)), & g(x(t,u(\cdot)),u(t)) > 0 \\ 0, & g(x(t,u(\cdot)),u(t)) < 0 \end{cases} \tag{12}$$

现在, 只需通过求解带罚函数的无约束最优控制问题$(\mathrm{UPE})_i (i = 1,2,\cdots)$ 的解序列$\{u_i\}$, 便可逼近原来约束最优控制问题(CP) 的解。具体计算时还需对控制函数进行参数化处理, 即将原时间最优控制问题(CP) 转化为有限无约束 $M + 2$ 维最优化问题$(\mathrm{UOP})_{k,N}$, $k = 1,2,\cdots,N = 1,2,\cdots$, 亦即求 $a_i \in R (i = 0,1,\cdots,M)$, $T_{k,N} \in (0, +\infty)$, 使得

$$\begin{aligned} &\hat{J}_{k,N}(t_f,a_0,a_1,\cdots,a_M) = \\ &T + N\Big\{\left|x(T,a_0,a_1,\cdots,a_M) - x_T\right| + \\ &\Big[\int_0^{T} g_+(t,a_0,a_1,\cdots,a_M)^{2k}\mathrm{d}t\Big]^{1/2k}\Big\} \end{aligned} \tag{13}$$

为最小。当然, 它也满足运动方程(7) 及初始条件(8)。其中, $x(T,a_0,a_1,\cdots,a_M)$ 和 $g_+(t,a_0,a_1,\cdots,a_M)$ 为将 $u(t) = u(t,a_0,a_1,\cdots,a_M)$ 代入相应终端状态约束方程和状态运动方程计算得到。对这一高维最优化问题$(\mathrm{UOP})_{k,N}$, $k = 1,2,\cdots,N = 1,2,\cdots$, 可用前面提出的改进遗传算法进行求解。

4　算　　例

现以经典的线性阻尼振子问题为例[5], 考虑使状态达到原点的时间最优控制问题(CP)

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = u$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad |u| \le 1$$

取 $b = 1, k^2 = 2, x_0 = -55.158\,9, y_0 = 36.439\,0$。对不同的约束分别取罚因子为 10^{23} 和 10^{12}, 取染色体群体规模为 20, 一点交叉算子杂交率 $p_{1c} = 0.1$, 线段搜索交叉杂交率 $p_{2c} = 0.3$, 完全变异算子变异率 $p_{1m} = 0.01$, 随机方向变异算子变异率 $p_{2m} = 0.5$, Powell 变异算子变异率 $p_{3m} = 0.1$。具体数值结果与解析解的比较如图 1 和图 2 所示。

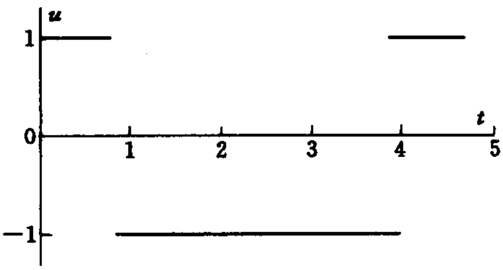

图 1　解析解的最优控制曲线

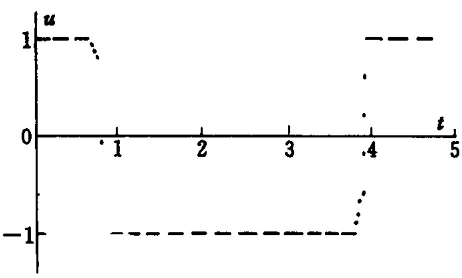

图 2　数值解的最优控制曲线

从两组图形的对比中可以看出它们基本一致, 计算所得最优时间为 4.713 727 38, 与解析解最优时间 4.712 388 9 的相对误差为 0.028 4% 。这说明本文所提出的方法是有效的。作为对比, 同时用梯度法和 Powell 法求解该问题, 结果均收敛于某局部解, 如求得的最优时间为 5.240 392 和 37.456 749 等, 但无法求到问题的最优解。这说明将遗传算法引入某些最优控制问题的求解是必要而可行的。

参考文献(References):

[1] 刘勇, 康立山, 陈毓屏. 非数值并行算法(二) —— 遗传算法[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[2] 陈国良, 王煦法, 庄镇泉, 等. 遗传算法及其应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1996.

[3] Goldberg D E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning[M]. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[4] Rudolph G. Convergence analysis of canonical genetic algorithm[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1994, 5(1): 96-101.

[5] 格尔雷 诺尔斯. 应用最佳控制引论[M]. 黄迅成, 汤仁彪译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1985.