

文章编号: 1001-0920(2002)01-0049-04

一类非线性反馈混沌系统分析和同步控制

陈从颜, 宋文忠

(东南大学 自动化研究所, 江苏 南京 210096)

摘要: 讨论了如何由 SISO 线性系统经非线性反馈构造混沌系统, 给出了此类混沌系统采用单变量信号实现同步的控制策略, 通过梯度下降法减少在带有噪声驱动信号下系统同步的多步误差均方差, 得到最优耦合参数。数字仿真表明了理论分析的正确性。

关键词: 混沌系统; 非线性反馈; 混沌同步; 最优控制

中图分类号: TP 18

文献标识码: A

Analysis for a typical nonlinear feedback chaotic system and synchronization control

CHEN Cong-yan, SONG Wen-zhong

(Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: The design of chaotic systems by nonlinear feedback from linear systems is proposed, and the control strategies for synchronizing the chaotic systems by scalar signal nonlinear-observer are developed. By minimizing the mean square synchronization error with respect to the coupling parameters, an optimal synchronization, which minimizes the synchronization error between the drive and response systems, is achieved. Simulations show the correctness of the theoretical analysis.

Key words: chaotic systems; nonlinear feedback; chaotic synchronization; optimal control

1 引言

混沌作为非线性动态系统所特有的一种运动形式, 既普遍存在又极其复杂。由于混沌系统的复杂性, 人们曾一度认为混沌是不可控和不可预测的, 但是近来的研究表明, 混沌不但可控, 而且在某种特定环境下十分有用^[1-5], 因而混沌系统的设计和构造是一个很有意义的研究课题。在混沌应用方面, 因为混沌同步在保密通信、扩频通信等领域显示出良好的应用前景^[5,6], 所以混沌同步问题得到了广泛的重

视与研究。关于混沌同步问题, 研究如何采用单变量信号和在噪声影响下实现同步具有重要的实际意义。在实际同步信号中总是带有噪声, Liaw 等研究了在带有噪声的驱动信号下保证系统同步稳定的条件^[7], Brown 等也进行了类似分析^[8]。但这些稳定条件并不能保证在噪声条件下实现最优同步效果。

本文首先分析了由 SISO 线性系统经非线性反馈形成混沌系统时, 其必要条件是相应线性系统中不可控状态分量必须稳定, 然后证明了此类混沌系统可通过单变量驱动信号实现同步, 并给出了在噪

收稿日期: 2000-10-20; 修回日期: 2001-04-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(69974009); 东南大学-南瑞继保公司学位基金课题

作者简介: 陈从颜(1969—), 男, 江苏南京人, 博士, 从事非线性系统中混沌的控制与应用研究; 宋文忠(1936—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事综合自动化、先进控制理论应用等研究。

声影响下实现最优同步控制的算法。

2 一类典型非线性反馈混沌系统分析

考虑如下—类混沌系统

$$\dot{x} = Ax + bf(x) \quad (1)$$

其中, $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^{n \times 1}$, $f: R^n \rightarrow R$ 。我们指出: 非线性系统(1) 可由 SISO 线性系统 $\dot{x} = Ax + bu$ 经非线性反馈 $u = f(x) \in R$ 得到。实际上, 如果线性系统为不完全可控系统, 则引入线性非奇异变换后, 可得到关于能控性分解的表达式。经非线性反馈后, 系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & A_{12} \\ 0 & A_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bf(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 $x_{nc} \in R^{n \times n}$ 是线性的。如果 A_{nc} 是不稳定的, 则系统的状态不会局限在一个有界区域内, 这与混沌系统的有界性相矛盾。因此, 经非线性反馈出现混沌的必要条件是: SISO 线性系统中不可控状态分量(如果存在) 必须稳定, 即不可控特征根只有两种情况: 共轭纯虚根和实部小于零的根。

以上给出了线性系统经非线性反馈产生混沌的必要条件, 这为混沌系统设计提供了一个非常有用的线索。下面给出混沌系统设计的例子。

例 1 按上述方法进行混沌系统设计。一类非线性控制系统如图 1 所示, 这里只考虑三阶系统, 取零极点为 $s_1 = 1.5, s_2 = -1 - 3i, s_3 = -1 + 3i, z_1 = -1.5 - 8i, z_2 = -1.5 + 8i$ 。非线性反馈环节 $f(x) = -Kx^3/3$, 系统的状态方程为

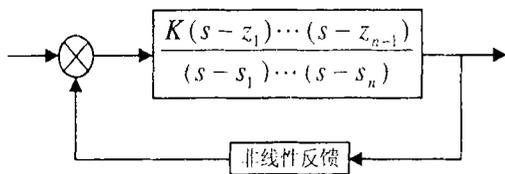


图 1 典型非线性控制系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 66.25 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{K}{3}x^3 \right) \quad (3)$$

系统的平衡点分别为: $(0, 0, 0), (6.3/\sqrt{K}, 0.6/\sqrt{K}, 0.82/\sqrt{K}), (-6.3/\sqrt{K}, -0.6/\sqrt{K}, -0.82/\sqrt{K})$ 。

可以看出, 系统(3) 所对应的线性系统是完全可控的, 满足上述条件。在 $K = 2.48$ 和 $x(0) = [0.8, -1.5, 0.6]$ 的初始条件下, 系统(3) 的相轨迹如图 2 所示。可见系统确实具有有界、总体吸引、局部排斥、非周期的混沌运动特征, 并可从混沌性态的 Poincaré 映射、功率谱、Lyapunov 指数等方面进一步证明确实存在混沌现象, 如系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1 = 0.61$ 。

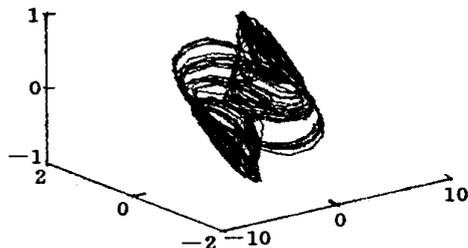


图 2 典型非线性反馈系统的相轨迹

注 1 由式(1) 定义的一类混沌系统包括部分 Lure 型混沌系统, 如 Chua 电路、高阶 Chua 电路、Duffing 振子、Rossler 系统、高阶 Rossler 系统等。

3 非线性反馈混沌同步分析

对于上述通过非线性反馈所得到的混沌系统, 可采用单变量驱动信号实现同步。首先考虑相应线性系统完全可控的一类混沌自治系统的同步问题。

定理 1 对于如下两个混沌系统

$$\dot{x} = Ax + bf(x) \quad (4a)$$

$$\dot{y} = Ay + bf(y) \quad (4b)$$

若 (A, b) 可控, 则通过单变量同步信号 $s(x) = f(x) + kx$ (其中 $k \in R^{1 \times n}$) 所构成的非线性观察器 $\dot{y} = Ay + bf(y) + b(s(x) - s(y))$, 可以实现式(4a) 和 (4b) 两个系统全局渐近同步。

文献[9] 有类似结论, 证明略。

推论 1 对相应于线性系统不完全可控的混沌自治系统(2), 若其中不可控状态是渐近稳定的, 则该混沌系统同步控制策略类似于定理 1。

证明略。

推论 2 对相应于线性系统不完全可控的混沌自治系统(2), 若其中不可控状态是临界稳定的(即线性系统不可控特征值为一对纯虚根), 则可将其转变为降阶非自治混沌系统, 通过单变量信号实现非自治混沌系统中可控状态的全局渐近同步。

经可控性分解后, 由式(2) 得

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + A_{12} x_{nc} + b f(x) = \\ &A_c x_c + b f(x_c, t) + h(t) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $h(t) = A_{12} x_{nc}$. 这意味着系统(5) 由线性系统 (A_c, b_c) 经 $f(x_c, t)$ 和 $h(t)$ 共同驱动下转变而来.

对于两个可控非自治混沌系统 $\dot{x}_c = A_c x_c + b f(x_c) + h(t)$ 和 $\dot{y}_c = A_c y_c + b f(y_c) + h(t)$, 可通过单变量同步信号 $s(x_c) = f(x_c) + k x_c$ (其中 $k \in R^{1 \times n}$), 构成非线性观察器 $\dot{y}_c = A_c y_c + b f(y_c) + b_c(s(x_c) - s(y_c))$. 令 $e = x_c - y_c$, 则 $\dot{e} = A_c e + b_c u$. 由于 (A_c, b_c) 完全可控, 同样可通过适当状态反馈 $u = -k e$ 使误差系统渐近稳定到零点, 即可实现两个系统可控状态全局渐近同步.

例 2 考虑例 1 中系统(3), 按照定理 1 采用单变量同步信号 $s(x) = f(x) + kx$, 定义同步误差为 $e = x - y$, $k = [k_1, k_2, k_3]$, 则误差状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A e + b u = (A - b k) e = \\ &\begin{bmatrix} -66.25k_1 & -66.25k_2 & -66.25k_3 + 15 \\ -3k_1 + 1 & -3k_2 & -3k_3 - 7 \\ -k_1 & -k_2 + 1 & -k_3 - 0.5 \end{bmatrix} e \end{aligned} \quad (6)$$

选择适当的矩阵 k , 可使误差趋于零点. 当 $k = [-0.5, -0.5, 0.5]$ 时, 其总同步误差 $e = \sum_{i=1}^3 |e_i|$, 如图 3 所示. 其中两个子系统初始条件分别为 $x(0) = [0.8, -1.5, 0.6]^T$, $y(0) = [0.2, 0.5, -0.6]^T$. 由图 3 可见, 经过 10 步暂态系统总的同步误差很快收敛到 0.

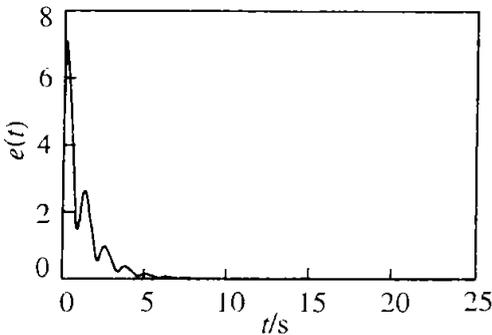


图 3 系统(3) 无噪声条件下同步误差

4 在噪声作用下的最优同步控制

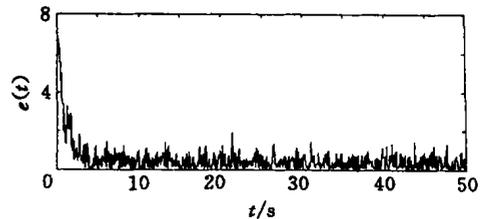
本文对噪声 ω 做如下几点假设: 1) 噪声均值为 0, 且 σ^2 强度远小于同步驱动信号; 2) 噪声是随机和遍历的; 3) 同步误差初始值独立于噪声.

在噪声 ω 作用下, 同步驱动信号为 $s(x) = f(x) + k(x + \omega)$, 则在非线性观察器作用下, 系统同步误差为 $\dot{e} = (A - b k) e - b k \omega$, 定义系统同步误差 $MSE = e^T e$, 定义多步同步均方差

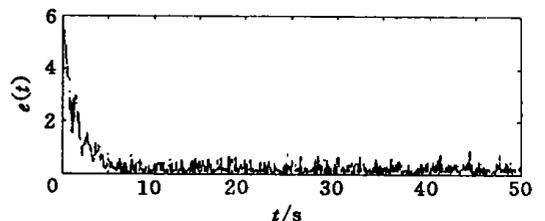
$$MSE_n = \frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^n e_i^T e_i \quad (7)$$

其中 n_0 为适当长度的步数. 系统同步误差均方差越小, 说明两系统的同步效果越好. 同步耦合参数矩阵 k 对同步误差均方差 (MSE_n) 影响极大, 耦合太强, 虽可使同步系统中相对 Lyapunov 指数远小于 0, 但也使噪声作用增强, 有可能使同步误差加大. 为寻找合适的同步耦合矩阵 k , 本文采用梯度下降法, 自适应搜索使多步同步误差均方差 (MSE_n) 最小的矩阵 k 最优值, 具体步骤如下:

- 1) 确定 k 阵取值范围 $\Omega \in R^3$, 既要保证同步稳定, 又应在一定强度范围内;
- 2) 设置初始矩阵 $k(0)$ 和同步精度 ϵ , 从 $t_0 = 0$ 开始, 让混沌系统在噪声环境下受同步控制运行一段时间, 待同步基本稳定后再运行 n_0 个采样时间, 计算 $MSE_n(0)$;
- 3) 置 $\tau = 1$, 取另一个初始值 $k(1)$;
- 4) 让混沌系统在 $k(\tau)$ 耦合同步控制下运行 n_0 个采样时间, 计算 $MSE_n(\tau)$, 如果 $MSE_n(\tau) > \epsilon$, 则进行 5), 否则结束;
- 5) 调整 $k(\tau)$: $\bar{k}(\tau + 1) = k(\tau) - \eta \frac{\partial MSE_n(\tau)}{\partial k(\tau)}$ (η 为自适应参数), 若 $\bar{k}(\tau + 1) \in \Omega$, 则 $k(\tau + 1) = \bar{k}(\tau + 1)$, 置 $\tau = \tau + 1$, 返回 4), 否则结束.



(a) $k(0)$ 时的同步误差



(b) 迭代后的同步误差

图 4 系统(3) 有噪声条件下同步误差

为研究噪声的影响作用, 在方程(3)的右边加入噪声(随机变量) $\epsilon\delta$ ($\epsilon\delta_1, \epsilon\delta_2, \epsilon\delta_3$), 随机噪声项 $\epsilon\delta_i$ 之间相互独立, 其各自的数学期望为 0, 方差为 0.5。按上述梯度下降法寻找耦合矩阵 k , 取 $k(0) = [-1, -1, 0]$, $\eta = 0.2, \epsilon = 0.1, \Omega = [-2 \sim 0, -2 \sim 0, 0 \sim 2]$ 。经 10 次迭代后 $k = [-1.73, -0.41, 0.5]$ 。仿真结果如图 4 所示, 图 4(a) 为 $k(0)$ 时的同步误差, 图 4(b) 为迭代后的同步误差。仿真结果表明, 优化后的矩阵 k 使得同步误差明显下降。

5 结 论

本文给出了由 SISO 线性系统经非线性反馈形成混沌系统的必要条件为其线性系统中不可控状态分量是稳定的, 提出了此类混沌系统通过采用单变量信号实现同步的控制策略, 并针对噪声影响给出了最优同步控制算法。本文工作对于混沌设计和混沌同步控制具有一定的指导意义。

参考文献(References):

- [1] Tokuda I, Tamura A, Tokunaga R, et al. Learning algorithm for chaotic dynamical systems which solve optimization problems[J]. IEICE Trans, 1998, 81: 377-388.

- [2] Ishigame A, Aihara T, Yuasa H. Optimization with constraint using chaos steepest descent method[J]. Trans of the Institute of Syst, Contr & Infor Eng, 1999, 12(2): 316-318.
- [3] Thomas L Vincent. Control using chaos[J]. IEEE Trans on Contr Syst, 1997, 17(12): 65-76.
- [4] 陈素琴, 袁瑞跃, 童勤业. 多数制式混沌 A/D 变换器研究[J]. 计量学报(Acta Metrologica Sinica), 2000, 21(1): 12-16.
- [5] Pecora L M, Carroll L T L. Synchronization in chaotic circuits[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.
- [6] Kocarev L, Parlitoz V. General approach for chaotic synchronization with applications to communication[J]. Phys Rev Lett, 1995, 74(25): 5028-5031.
- [7] Liaw Y M, Tung P C. Analysis and observer design in synchronization via a state feedback control method[J]. Phys Rev E, 1997, 56(5): 5265-5271.
- [8] Brown R, Rulkov N F. Synchronization of chaotic systems: The effect of additive noise and drift in the dynamics of the driving[J]. Phys Rev E, 1994, 50(6): 4488-4508.
- [9] 杨晓松. 一类混沌系统观测器[J]. 物理学报(Acta Physica Sinica), 2000, 49(10): 1919-1921.

(上接第 48 页)

参考文献(References):

- [1] 李晓理, 王伟, 孙维. 多模型自适应控制[J]. 控制与决策 (Control and Decision), 2000, 15(4): 390-394.
- [2] Hunt K J, Johansen. Design and analysis of gain-scheduled control using local controller network[J]. Int J Control, 1997, 66(5): 619-652.
- [3] Zufiria P J, Fraile-Ardanuy F, Riaza R, et al. Neural adaptive control of non-linear plants via a multiple inverse model approach[J]. Int J Adapt Control Signal Process, 1999, 13(4): 219-239.
- [4] Smith R M, Johanson T A. Multiple model approaches to modelling and control[M]. London: Taylor & Frances, 1997.
- [5] 李晓理, 王伟. 基于局部化技术的多模型自适应控制

- [J]. 自动化学报(Acta Automat Sinica), 2000, 26(4): 523-528.
- [6] J M Tarela, E Alonso M V. A representation method for PWL functions oriented to parallel processing[J]. Math Comput Modelling, 1990, 13(10): 75-83.
- [7] 王书宁. Optimal continuous piecewise-linear approximation[R]. 北京: 清华大学自动化系, 2000.
- [8] Zhu K Y, Wang L. Design of stable linear system with input constrain[A]. IFAC 5th Symp on Low Cost Autom[C]. Shenyang, 1998. 11-15.
- [9] T Hachino, H Takata. Identification for nonlinear systems by the automatic choosing function and the genetic algorithm[A]. Proc of the 11th IFAC Symp on System Ident[C]. Kitakyushu, 1997. 1: 69-74.