文章编号: 1001-0920(2002)01-0103-04

不确定离散时滞系统具有H∞干扰抑制的保成本控制

刘 飞, 苏宏业, 蒋培刚, 褚 健
(浙江大学 先进控制研究所, 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 针对一类用矩阵凸多面体形式表示的不确定线性离散时滞系统, 提出一种通过无记忆状态反馈实现的具有H_∞干扰抑制的保成本控制。当对象存在不确定性以及外部干扰统计特性未知时, 该控制器能保证闭环系统稳定和一定的线性二次型性能指标上界, 同时具有H_∞范数下的干扰抑制作用。基于Lyapunov稳定性理论, 控制器设计可转化为线性矩阵不等式的可解性问题。数值仿真表明, 该控制器实际是对最优保成本上界和干扰抑制能力的一种折衷。

关键词: 保成本控制; H_∞控制; 线性矩阵不等式; 时滞系统; 离散时间系统
中图分类号: TP 13 **文献标识码**: A

Guaranteed cost control with H∞ disturbance attenuation for polytopic uncertain discrete-time systems with delay

LIU Fei, SU Hong-ye, JIANG Pei-gang, CHU Jian
(Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: A kind of guaranteed cost controller is proposed for polytopic uncertain linear discrete-time systems with state delay. In the presence of plant uncertainties and external disturbance, the controller guarantees the robust stability of the closed-loop system and satisfies H_∞ disturbance attenuation level. Based on Lyapunov functional technique, the synthesis of controller via a memoryless state feedback can be transformed to a linear matrix inequality (LMI) feasibility problem. A numerical example illustrates that the design of the controller is a tradeoff between optimal guaranteed cost upper bound and disturbance attenuation level.

Key words: guaranteed cost control; H_∞ control; LMI; time-delay system; discrete-time system

1 引 言

线性二次型最优控制(LQ/LQG)依赖于对象的精确数学模型和对系统外部干扰的特殊限定, 当对象具有不确定性以及干扰统计特性未知时, 最优特性甚至稳定性难以保证。近20年来, 对鲁棒LQ的研究成果有限, 代之而起的保成本控制(GCC)能考虑对象的不确定性而保证系统稳定, 并使系统的线性二次型性能指标小于一定的上界[1]。GCC进一步推广到不确定时滞系统[2,3], 但一般GCC并未考

收稿日期: 2000-10-25; **修回日期**: 2001-01-15
基金项目: 国家自然科学基金项目(69934030); 国家杰出青年基金项目(60025308)
作者简介: 刘飞(1965—), 男, 安徽宣城人, 副教授, 博士, 从事鲁棒控制、时滞系统等研究; 褚健(1963—), 男, 浙江海盐人, 教授, 博士生导师, 从事时滞系统、非线性系统等研究。

虑对外部干扰的抑制。随着 H_∞ 控制理论逐渐被接受[4], 时不变系统的混合 H_2/H_∞ 控制问题得到研究[5,6]。混合 H_2/H_∞ 兼顾了 H_2 性能和 H_∞ 约束, 在优化 H_2 性能(或性能上界)的同时, 对一类能量有界外部干扰具有抑制作用。然而对于参数不确定性系统, 实现鲁棒混合 H_2/H_∞ 控制较为困难。

本文借鉴混合 H_2/H_∞ 的思想, 在状态空间描述下, 当参数不确定系统采用矩阵凸多面体形式时[7], 研究不确定离散时滞系统具有 H_∞ 干扰抑制的保成本控制问题。基于 Lyapunov 稳定理论构造无记忆状态反馈鲁棒控制器, 使得该控制器能保证闭环系统稳定和一定的线性二次型性能指标的上界, 同时具有 H_∞ 范数下的干扰抑制作用。进一步, 控制器设计可转化为线性矩阵不等式(LMI)的可解性问题。

2 问题描述

考虑一类不确定线性离散时滞系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\theta)x(k) + A_d(\theta)x(k-d) + B_u(\theta)u(k) + B_w w(k) \\ x(k) = 0, \quad -d \le k < 0, \quad x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

其中, $x(k) \in R^n$ 为状态向量, $x(k-d)$ 为滞后状态, $d > 0$ 为滞后常数, $u(k) \in R^m$ 为系统的控制输入向量, $w(k) \in l_2[0, \infty)$ 为外部干扰输入, 而

$$\begin{cases} A(\theta) = \sum_{i=1}^{l} \theta_i A_i, \quad A_d(\theta) = \sum_{i=1}^{l} \theta_i A_{d,i} \\ B_u(\theta) = \sum_{i=1}^{l} \theta_i B_{u,i} \end{cases} \tag{2}$$

式中 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l]^{\mathrm{T}} \in R^l$ 是不确定参数向量, 且满足 $\sum_{i=1}^{l} \theta_i = 1, \forall \theta_i \ge 0$。即系统(1) 可表示成如下矩阵凸多面体[7]

$$\mathrm{Co}\{[A_1 \quad A_{d,1} \quad B_{u,1}] \cdots [A_l \quad A_{d,l} \quad B_{u,l}]\}$$

其中 $A_i, A_{d,i}$ 和 $B_{u,i}(i = 1, 2, \cdots, l)$ 是适当维数的已知矩阵。

对确定性时不变系统, LQ 问题是给定初始条件 $x(0)$, 设计控制器使下列二次型性能指标最小。

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) + u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k)] \tag{3}$$

其中, $0 < Q = Q^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$ 和 $0 \le R = R^{\mathrm{T}} \in R^{m \times m}$ 分别是给定的状态和控制权矩阵。

对于不确定系统, GCC 问题[1] 是设计一个控制器, 使对所有允许的不确定性, 闭环系统稳定, 且二次型性能指标(3) 不超过某个确定的上界, 即

$$J \le J^* = x_0^{\mathrm{T}} P x_0 \tag{4}$$

若定义如下辅助输出信号[4]

$$z(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{5}$$

式中, $C = [Q^{1/2} \quad 0]^{\mathrm{T}}, D = [0 \quad R^{1/2}]^{\mathrm{T}}$, 则二次型指标(3) 可表示为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} z^{\mathrm{T}}(k)z(k) = \| z \|_2^2 \tag{6}$$

式中 $\| \cdot \|_2$ 为 l_2 范数。

H_∞ 控制问题[6] 是对于一定的干扰抑制水平 γ, 设计一个控制器, 使得

$$\| z \|_2^2 < \gamma^2 \| w \|_2^2 \tag{7}$$

进一步, 将 GCC 与 H_∞ 控制混合, 使得

$$J = \| z \|_2^2 \le \gamma^2 \| w \|_2^2 + x_0^{\mathrm{T}} P x_0 \tag{8}$$

此即所谓具有 H_∞ 干扰抑制的保成本控制, 亦称鲁棒混合 H_2/H_∞ 控制。显然, 从 $w(k)$ 到 $z(k)$ 的 H_∞ 范数满足一定的抑制水平 γ(当 $x_0 = 0$ 时, 即为一般的 H_∞ 控制), 并且当 $w(k) = 0$ 时, $J \le x_0^{\mathrm{T}} P x_0$ 即为 GCC。

现对不确定离散时滞系统(1) 和(5), 引入无记忆状态反馈控制器 $u(k) = Kx(k)$, 相应的闭环系统表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = A_C(\theta)x(k) + A_d(\theta) \times x(k-d) + B_w w(k) \\ z(k) = C_C x(k) \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases} A_C(\theta) = \sum_{i=1}^{l} \theta_i (A_i + B_{u,i}K) \\ C_C = C + DK \end{cases} \tag{10}$$

定义 1 设控制器 $u(k) = Kx(k)$, 如果存在正定对称矩阵 $P, W \in R^{n \times n}$, 矩阵 $K \in R^{m \times n}$, 标量 $\gamma > 0$, 使得下列不等式对所有非零的 $x(k) \in R^n$, $x(k-d) \in R^n$ 和 $w(k)$, 以及所有允许的不确定性成立, 则该控制器称为系统(1) 和(5) 的具有 H_∞ 范数下干扰抑制能力的保成本控制器。

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ w(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A_C^{\mathrm{T}}(\theta)PA_C(\theta) - P + W + C_C^{\mathrm{T}}C_C & A_C^{\mathrm{T}}(\theta)PA_d(\theta) & A_C^{\mathrm{T}}(\theta)PB_w \\ A_d^{\mathrm{T}}(\theta)PA_C(\theta) & A_d^{\mathrm{T}}(\theta)PA_d(\theta) - W & A_d^{\mathrm{T}}(\theta)PB_w \\ B_w^{\mathrm{T}}PA_C(\theta) & B_w^{\mathrm{T}}PA_d(\theta) & B_w^{\mathrm{T}}PB_w - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ w(k) \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

如下定理说明, 具有 H_∞ 干扰抑制的保成本控制器不仅鲁棒稳定和满足一定的二次型指标上界, 而且从外部干扰输入 $w(k)$ 到辅助输出 $z(k)$ 的传递函数的 H_∞ 范数满足一定的抑制水平 γ。

定理 1　设 $u(k) = Kx(k)$ 是不确定离散时滞系统(1) 和(5) 的具有 H_∞ 干扰抑制能力的保成本控制器, 则对所有允许的不确定性, 相应的闭环系统(9) 鲁棒二次稳定, 并且二次型性能指标满足 $J \le x_0^{\mathrm{T}} P x_0$, 同时 H_∞ 范数满足一定的抑制水平 γ。

证明　考虑正定对称矩阵 $P, W \in R^{n\times n}$, 设

$$V(x,k) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) + \sum_{\sigma=k-d}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(\sigma)Wx(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{12}$$

沿闭环系统(9) 的任意轨线, $V(x,k)$ 的一阶前向差分为

$$\begin{aligned}
&\Delta V(x,k) = V(x,k+1) - V(x,k) = \\
&x^{\mathrm{T}}(k)[A_C^{\mathrm{T}}(\theta)PA_C(\theta) - P + W]x(k) + \\
&x^{\mathrm{T}}(k)A_C^{\mathrm{T}}(\theta)PA_d(\theta)x(k-d) + \\
&x^{\mathrm{T}}(k)A_C^{\mathrm{T}}(\theta)PB_w w(k) + \\
&w^{\mathrm{T}}(k)B_w^{\mathrm{T}}PA_C(\theta)x(k) + \\
&x^{\mathrm{T}}(k-d)[A_d^{\mathrm{T}}(\theta)PA_d(\theta) - W]x(k-d) + \\
&x^{\mathrm{T}}(k-d)A_d^{\mathrm{T}}(\theta)PB_w w(k) + \\
&x^{\mathrm{T}}(k-d)A_d^{\mathrm{T}}(\theta)PA_C(\theta)x(k) + \\
&w^{\mathrm{T}}(k)B_w^{\mathrm{T}}PA_d(\theta)x(k-d) + \\
&w^{\mathrm{T}}(k)B_w^{\mathrm{T}}PB_w w(k)
\end{aligned} \tag{13}$$

在式(13) 的基础上, 令 $w(k) = 0$, 由定义 1 有

$$\Delta V(x,k) < -x^{\mathrm{T}}(k)C_C^{\mathrm{T}}C_C x(k) < 0 \tag{14}$$

显然闭环系统二次稳定。进一步, 考虑 $w(k) \ne 0$, 由定义 1 中条件(11), 得

$$\begin{aligned}
&V(x,k+1) - V(x,k) \le \\
&-\|z(k)\|^2 + \gamma^2\|w(k)\|^2
\end{aligned} \tag{15}$$

将式(12) 代入(15), 则

$$\begin{aligned}
&x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) + \\
&x^{\mathrm{T}}(k)Wx(k) - x^{\mathrm{T}}(k-d)Wx(k-d) + \|z(k)\|^2 \le \gamma^2\|w(k)\|^2
\end{aligned}$$

在区间 $k = 0 \to \infty$ 上对如上不等式求和, 考虑到初始条件和 $\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$, 即得式(8)。□

3　控制器设计

将具有 H_∞ 干扰抑制的保成本控制器的综合问题转化为线性矩阵不等式(LMI) 的可解性问题, 可得到如下主要结果:

定理 2　给定一类不确定线性离散时滞系统(1) 和二次型性能指标(3), 以及一定的干扰抑制水平 $\gamma > 0$, 如果存在正定对称矩阵 $X, V \in R^{n\times n}$ 和矩阵 $Y \in R^{m\times m}$ 使下列LMIs 可解, 则存在具有 H_∞ 范数下干扰抑制水平的保成本控制器 $u(k) = Kx(k)$。进一步, 控制器增益 $K = YX^{-1}$, 且 $J \le x_0^{\mathrm{T}}X^{-1}x_0$。

$$\begin{bmatrix}
X - V & 0 & 0 & M_i^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} \\
0 & V & 0 & XA_{d,i}^{\mathrm{T}} & 0 \\
0 & 0 & \gamma^2 I & B_w^{\mathrm{T}} & 0 \\
M_i & A_{d,i}X & B_w & X & 0 \\
N & 0 & 0 & 0 & I
\end{bmatrix} > 0 \tag{16}$$

式中

$$M_i = A_iX + B_{u,i}Y$$
$$N = CX + DY, \quad i = 1, 2, \cdots, l$$

证明　容易得到下列不等式, 使式(11) 成立。

$$\begin{bmatrix}
P - W & 0 & 0 \\
0 & W & 0 \\
0 & 0 & \gamma^2 I
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
A_C^{\mathrm{T}}(\theta) & C_C^{\mathrm{T}} \\
A_d^{\mathrm{T}}(\theta) & 0 \\
B_w^{\mathrm{T}} & 0
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
P & 0 \\
0 & I
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
A_C^{\mathrm{T}}(\theta) & C_C^{\mathrm{T}} \\
A_d^{\mathrm{T}}(\theta) & 0 \\
B_w^{\mathrm{T}} & 0
\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} > 0 \tag{17}$$

应用 Schur 补[7], 并将式(10) 代入(17), 得

$$\begin{bmatrix}
P - W & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{l}\theta_i(A_i + B_{u,i}K)^{\mathrm{T}} & (C + DK)^{\mathrm{T}} \\
0 & W & 0 & \sum_{i=1}^{l}\theta_i A_{d,i}^{\mathrm{T}} & 0 \\
0 & 0 & \gamma^2 I & B_w^{\mathrm{T}} & 0 \\
\sum_{i=1}^{l}\theta_i(A_i + B_{u,i}K) & \sum_{i=1}^{l}\theta_i A_{d,i} & B_w & P^{-1} & 0 \\
C + DK & 0 & 0 & 0 & I
\end{bmatrix} > 0 \tag{18}$$

考虑不等式(18) 关于 $A_i, B_{u,i}, A_{d,i}$ 是线性的, 故下列不等式与之等效。

$$\begin{bmatrix} P-W & * & * & * & * \\ 0 & W & * & * & * \\ 0 & 0 & \gamma^2 I & * & * \\ A_i + B_{u,i}K & A_{d,i} & B_w & P^{-1} & * \\ C + DK & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (19)$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, l$, $*$ 表示矩阵中关于对角线的转置对称项。

对不等式(19) 中矩阵项前乘和后乘对角块阵 $\mathrm{diag}(P^{-1}, P^{-1}, I, I, I)$, 定义 $X = P^{-1}, Y = KX$ 和 $V = P^{-1}WP^{-1}$, 即可证得式(16)。□

注 1 对系统(1) 和性能指标(3), 如果以下优化问题

$$\min_{\beta, \gamma, X, Y, V} \beta$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} -\beta & x_0^{\mathrm{T}} \\ x_0 & -X \end{bmatrix} \leq 0 \text{ and LMIs}(16) \quad (20)$$

有解 β, γ, X, Y, V, 则可得到保成本控制下成本的最优上界 β^*。

注 2 对系统(1) 和性能指标(3), 令 $\alpha = \gamma^2$, 如果以下优化问题

$$\min_{\alpha, X, Y, V} \alpha$$

$$\text{s.t. LMIs}(16) \quad (21)$$

有解 α, X, Y, V, 则可得到一定保成本控制下最小能达到的干扰抑制水平 $\gamma^* = \alpha^{1/2}$。

对系统(1) 和性能指标(3), 保成本的最优上界 β^* 与 H_∞ 干扰抑制水平 γ 互相制约。降低 β^* 则 γ 增大, 对外部干扰的抑制能力减弱; 反之亦然。

4 数值例子

对系统(1) 和性能指标(3), 设 $Q = I, R = 1$, 而

$$A(\theta) = \theta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1.2 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.1 & -1.6 \end{bmatrix}$$

$$A_d(\theta) = \theta_1 \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$B_u(\theta) = \theta_1 \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.3 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

应用定理 2, 令 $\gamma = 10$, 可得保成本控制器

$$u(k) = [-1.1374, 1.9889]x(k)$$

$$J^* = 64.7315$$

进一步, 解优化问题(20), 成本的最优上界 $\beta^* = 38.1898$; 解优化问题(21), 最小的干扰抑制水平 $\gamma^* = 7.7699$, 此时 $J^* = 67.1329$。保成本的最优上界 β^* 与 H_∞ 干扰抑制水平 γ 的关系如图 1 所示。可见, 成本的最优上界与系统抗外部干扰能力相互制约。

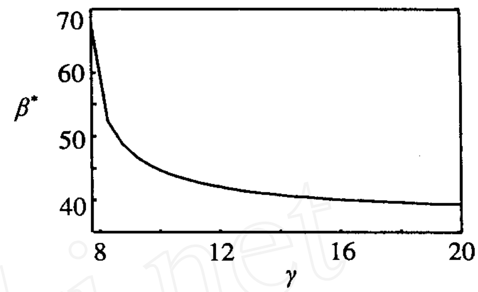

图 1 最优上界 β^* 与抑制水平 γ 的关系

5 结 论

具有 H_∞ 范数下干扰抑制能力的保成本控制, 在对象具有不确定性以及外部干扰统计特性未知时, 能保证系统稳定和一定的二次型性能指标上界, 同时使描述外部干扰输入影响的 H_∞ 范数满足一定的抑制水平 γ。数值仿真表明, 该控制器实际是对最优成本上界和干扰抑制能力的一种折衷。对于不确定时滞系统, 进一步的研究包括考虑时滞大小的影响。

参考文献(References):

[1] Petersen I R, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time linear systems[J]. Int J Robust and Nonl Contr, 1996, 6(4): 267-280.

[2] Yu Li, Chu J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear time-delay systems[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1155-1159.

[3] Mahmoud M S, Xie L. Guaranteed cost control of uncertain discrete systems with delays[J]. Int J of Control, 2000, 73(2): 105-114.

[4] 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.

[5] Bernstein D S, Haddad W M. LQG control with an H_∞ performance bound: A Riccati equation approach[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1989: 34(3): 293-305.

[6] Khargonekar P P, Rotea M A. Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1991, 36(7): 824-837.

[7] Boyd S, Ghaoui L El, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in systems and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.