

文章编号: 1001-0920(2002)01-0107-04

# 小波变换自适应滤波器及在主动噪声控制中的应用

张玉麟, 陈伟民, 杨建春, 黄尚廉  
(重庆大学 智能结构研究中心, 重庆 400044)

**摘要:** 讨论了传统的 LMS 在信号处理中的不足, 研究了小波变换自适应算法 (WLM S) 的滤波器结构和实现, 并将其应用于主动噪声控制。仿真结果表明, 与传统的 LMS 算法相比, WLM S 算法的收敛速度和稳定性得到显著的提高。

**关键词:** LMS 算法; 离散小波变换; WLM S 算法; 主动噪声控制  
**中图分类号:** TP 27 **文献标识码:** A

## Wavelet transformation adaptive filter and its application in active noise control

ZHAN G Yu-lin, CH EN Wei-min, YA N G Jian-chun, HU AN G Shang-lian  
(Center for Intelligent Structures, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** The weakness of conventional Least-Mean-Square (LMS) algorithm in real-time signal processing is discussed. The structure and implementation of wavelet transformation Least-Mean-Square (WLM S) filter are explored. WLM S and conventional LMS are compared by applying them to active noise control. The simulations show that WLM S has higher convergence rate and better robustness than conventional LMS.

**Key words:** LMS algorithm; discrete wavelet transformation; WLM S algorithm; active noise control

### 1 引言

主动噪声控制 (ANC) 作为消除不必要噪声的一种有效方法, 已在汽车、飞机、潜艇等内部噪声控制方面得到广泛的研究, 随着各项技术的发展, 显示出其良好的应用前景。目前, 噪声控制研究的重点是控制算法和系统集成。在传统的 ANC 系统中, 广泛采用 Widrow-Hoff LMS 自适应算法, 这种算法实现简单并且运算量小, 其原理如图 1 所示。其中,  $x(k)$ ,  $d(k)$ ,  $e(k)$  和  $y(k)$  分别表示系统参考信号、系统干

扰、控制误差和系统控制信号。控制信号可表示成  $y(k) = X^T(k)W(k)$ 。这里,  $X^T(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1)]$ ,  $W(k) = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T$  是  $N$  阶自适应滤波器的权向量。因此  $e(k) = d(k)$

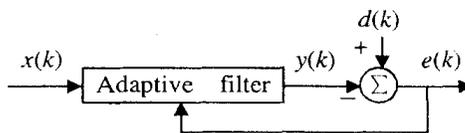


图 1 LMS 算法原理

收稿日期: 2000-08-31; 修回日期: 2001-04-23

基金项目: 国家自然科学基金项目 (59635140)

作者简介: 张玉麟 (1972—), 男, 山东嘉祥人, 博士生, 从事自适应控制、数字信号处理等研究; 黄尚廉 (1936—), 男, 四川乐山人, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士, 从事智能结构、光电技术等研究。

-  $y(k)$ 。

我们的目标是在很短的时间内使  $e(k)$  达到预定的控制阈值。从数学的角度考虑, 控制过程中  $e(k)$  必须快速收敛。为此目的, 根据 Widrow-Hoff LMS 算法, 滤波器权向量应按  $W(k+1) = W(k) + 2\mu X(k)e(k)$  进行自适应调整, 其中  $\mu > 0$  是收敛系数。由理论分析可知, 对于固定的  $\mu$  而言, 算法的收敛速度主要取决于系统参考信号自相关矩阵  $R_{xx} = E[XX^T]$  的条件数  $\lambda(R_{xx})$ 。由此可知, 当  $R_{xx}$  为病态矩阵时, LMS 算法的收敛速度会大大降低, 甚至出现发散的情况。这意味着当系统的参考信号为时变且不确定时, 采用传统 LMS 设计的系统很容易出现控制溢出。为了提高 LMS 算法的收敛速度和稳定性, 可对系统的输入信号进行变换, 使变换后信号的自相关矩阵具有较低的特征值分布, 即  $\lambda(R_{xx})$  接近 1。本文采用对系统的参考信号进行小波变换, 以此提高 LMS 的性能。

## 2 离散小波变换<sup>[2~4]</sup>

小波是平方可积函数空间上的一簇基函数, 因此任何平方可积信号  $x(t)$  均可由小波函数  $W(t)$  的变换和膨胀来表示, 即

$$x(t) = \sum_{j,k} 2^j x_{j,k} W(2^j t - k) \quad (1)$$

在实际应用中, 小波变换系统可通过有效的 Mallat 算法计算获得, 并且待处理的数据都是有限长数据。设数据长度为  $N$ , 并设这是最小尺度。我们使用包含  $x(t)$  样本的数据向量与矩阵  $Q$  相乘计算多分辨率分解。其中  $Q$  表示离散小波变换(DWT), 它是一种正交线性变换, 可由系数  $\{c_k\}$  完全确定。 $Q$  包含一些循环子模块, 意味着在小波变换中具有滤波和抽样的功能。因此数据向量  $x = [x(1), x(2), \dots, x(N)]^T$  的多分辨率系数可表示为

$$Qx = Q_{\log_2 N} (\dots (Q_2(Q_1 x)) \dots) \quad (2)$$

式(2)中每个  $Q_k$  具有如下形式

$$Q_k = \begin{bmatrix} I_{N-M \log_2 N - k+1} & 0 \\ 0 & D_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中,  $I_m$  是  $m \times m$  单位矩阵,  $D_k$  是在  $k$  级的解析矩阵。

研究表明<sup>[2]</sup>, 对于许多随机过程, 小波变换与卡南洛维展开式很相似。多分辨率分量的自相关矩阵基本上是带状结构, 这意味着在信号处理过程中,  $x(n)$  的多分辨率分量是局部不相关的。把小波变换引入 LMS 算法, 可使算法的性能得到明显提高。

## 3 小波变换自适应算法(WLMS)

在 WLMS 算法中, 根据不同的尺度, 滤波器的输入信号经小波变换形成新的输入信号, 自适应滤波器的权向量对不同的频率成分进行单独调整。这意味着原来输入信号的频率成分在原始信号所占的比例得到自适应调整, 从而重构成要得到的输出信号。该算法可由图 2 来表示。

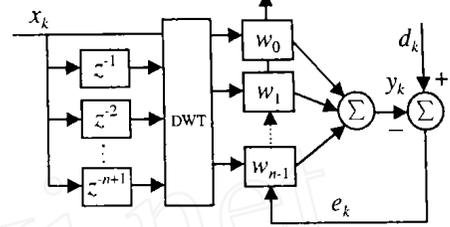


图 2 WLMS 算法

在图 2 中, 输入向量  $X_k = [x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-N+1}]$  经离散小波变换分解成新的向量  $S_k$ , 由上节的分析可知

$$S_k = QX_k \quad (4)$$

根据小波变换的定义和物理意义, 这一过程可形象地表示成图 3。其中,  $L(z)$  和  $H(z)$  分别是低通和高通尺度滤波器, 当选择不同的小波函数时, 它们是不同的; 2 表示数据抽样。

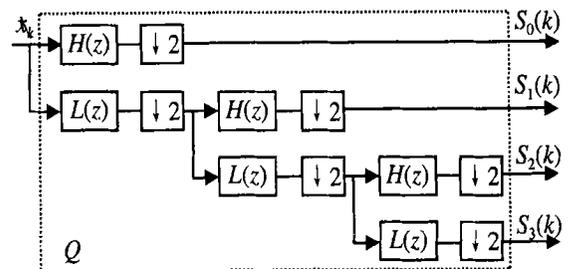


图 3 离散小波变换分解

在 WLMS 算法滤波器中, 输入信号经小波变换形成的新向量  $S_k$ , 通过滤波器的权向量  $W_k$  而形成滤波器的输出信号

$$y_k = W_k^T S_k \quad (5)$$

由图 2 可知, 相应的误差信号可表示成

$$e_k = d_k - y_k \quad (6)$$

根据自适应算法, 为使误差信号得到衰减, 滤波器的权向量应按下式进行自适应调整。

$$\hat{W}_{k+1} = \hat{W}_k - \mu \hat{g}_k \quad (7)$$

$$\hat{g}_k = -2[R_s^T(k)R_s(k)]^{-1} e_k S_k \quad (8)$$

其中  $\hat{R}_s(k)$  是一个伪上三角稀疏矩阵, 它可经过迭代得到。把  $S_k$  作为新行添加到  $R_s(k-1)$  中, 然后通

过 Givens 转置去零化该行, 即

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_s(k) \\ 0 \end{bmatrix} = Z(k) \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \gamma} \hat{R}_s(k-1) \\ \sqrt{\gamma} S^T(k) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中,  $Z(k)$  是单位矩阵,  $\gamma < 1$  称为遗忘因子。

由理论分析知, WLS 算法比传统的 LMS 算法收敛快。在 ANC 系统中, 算法收敛的速度直接影响到系统的性能。如果把 WLS 算法应用于主动噪声控制, 则能大大提高系统的稳定性和收敛速度。

### 4 WLS 算法在主动噪声控制中的应用

主动噪声控制是指针对当前被控声场的特性, 人为产生一个控制声场, 利用声波干涉原理改变声场的分布, 即“以声消声”, 从而达到主动降噪的目的。在这一过程中, 关键是如何产生控制声场。在实际控制中, 一般采用数字信号处理技术来生成控制声场, 其中利用自适应滤波器就是一种有效的方法。

传统的自适应滤波器多采用 LMS 算法, 虽然取得了较好的控制效果, 但当被控声场是不确定或时变时, 其控制能力则显得不足。为此, 本文采用 WLS 算法进行主动噪声控制的研究。为简化起见, 我们建立了如图 4 所示的单输入单输出的主动噪声控制系统。其中,  $e(k)$  是系统的输出, 它可通过传感器测得;  $T_1$  和  $T_2$  分别是干扰噪声与传感器、执行器与传感器之间的传递函数。在该系统中, 根据被控系统的输出, 滤波器产生控制信号, 使执行器发出控制声波, 从而形成控制声场。这一过程对滤波器要求很严格。尽管控制之前无法事先确定滤波器的各项参数, 但可利用自适应滤波原理, 在控制中使系统自适应得到最佳的控制滤波器。

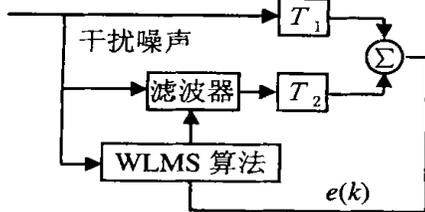


图 4 SISO 主动噪声控制系统

为便于分析, 我们用  $x(k)$  表示系统的干扰噪声, 并且定义以下向量和矩阵

$$W_k = [w_0(k), w_1(k), \dots, w_N(k)]^T \quad (10)$$

$$X_k = [x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-N+1}]^T \quad (11)$$

其中,  $W_k$  是  $N$  阶滤波器的权向量,  $X_k$  是系统的输入

向量。根据图 4 的控制系统可得

$$e(k) = d(k) + W_k^T T_2 X_k \quad (12)$$

式中,  $d(k)$  是在干扰噪声单独作用时系统的响应,

$T_2 = \sum_{j=0}^{J-1} t_j z^{-j}$  是传感器与执行器在  $z$  域的传递函数。为能应用 WLS 算法, 这里定义以下变量

$$L_k = T_2 X_k \quad (13)$$

$$S_k = Q T_2 X_k = Q L_k \quad (14)$$

$$R_L = E[L_k L_k^T] \quad (15)$$

在控制系统中, 输入向量首先经  $T_2$  得到  $L_k, R_L$  是  $L_k$  的自相关矩阵。此时  $L_k$  是滤波器的输入信号, 根据式(10) ~ (12), 滤波器的权向量  $W_k$  可自适应调整, 以使输出误差  $e(k)$  达到最小, 从而实现主动噪声控制的目的。由前面分析可知,  $R_L$  具有良好的正规结构, 可使算法的收敛速度得到很大的提高。

### 5 仿真实验及其结果

为了证明 WLS 算法的性能, 我们用 MATLAB 进行仿真控制实验<sup>[5,6]</sup>, 用系统的均方误差(MSE) 衰减快慢表示算法和系统的收敛速度。假设图 4 中的  $T_1$  和  $T_2$  可用 FIR 滤波器表示, 并且已经离线识别完毕。其中

$$T_1 = 0.72 + 0.75z^{-1} + 0.47z^{-2} - 1.6z^{-3}$$

$$T_2 = 0.3 + z^{-1} - 0.5z^{-2}$$

实际系统的激励是不确定的, 一般从频率成分上可大体分为: 单频信号、谐波信号和多频信号(如随机噪声)。本文分别采用这 3 种不同的信号作为系统输入, 研究算法的性能。为与 WLS 算法比较, 同时进行两种算法的控制, 并且给出了对比结果。

定义符号  $W_F$  和  $T_F$  分别为使用 WLS 算法和 LMS 算法的滤波器, 相应的收敛系数分别为  $\mu_w$  和  $\mu_t$ , 信号的采样频率为  $F_s$ 。在 WLS 算法中, 采用了 Daubechies 小波函数, 该小波是紧支撑的小波, 具有极值相位和给定支撑空间上的最高消失矩阶数。与其相应的尺度滤波器是最小相位滤波器。本文对信号进行 4 级分解。

#### 5.1 单频信号

当系统的输入信号为单频信号时, 使用 MATLAB 生成一个 75 Hz 的单频信号  $x(n) = \sin(2\pi \times 75n/F_s)$ , 其中  $F_s = 3000$ ,  $W_F$  和  $T_F$  的长度都是 16,  $\mu_w = \mu_t = 0.015$ 。在控制过程中, 系统的均方误差(MSE) 与迭代次数的关系图略。在迭代 30 次后, WLS 算法和 LMS 算法都能很好地收敛, 并

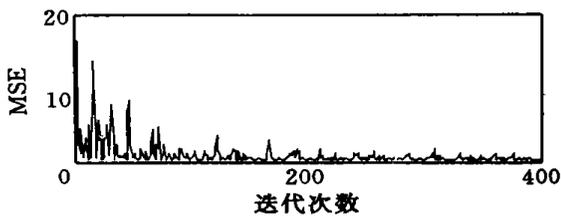
且两种算法的收敛速度基本相同。这是因为系统的输入信号频率成分太简单,此时小波变换的意义不大,WLM S 算法没有显示出其应有的优越性。所以,如果被控系统的输入基本上是以单频信号为主,就不宜采用WLM S 算法,因为此时它不但不能提高系统的收敛速度,反而会增加一定的计算量。

## 5.2 谐波信号

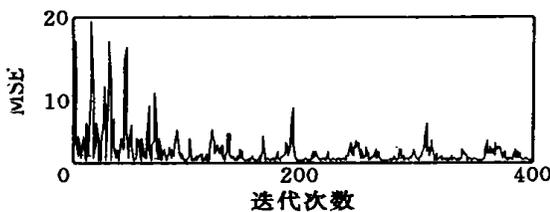
当系统的输入为谐波信号时,可以表示成

$$X_k = \sum_{i=0}^3 \sin(2\pi f_i k / F_s) + r_a(k) \quad (16)$$

其中,  $f_i$  是信号的频率成分,在此分别取为 25, 75, 200, 400 (Hz);  $r_a(k)$  为幅值较小的随机噪声干扰。仿真实验结果如图 5 所示。可见,经过 180 次迭代后,WLM S 算法能很好地收敛,而 LM S 算法却要经过 350 次迭代才能明显地收敛;并且一旦 WLM S 算法收敛后,系统就能保持稳定的状态,而 LM S 算法时常出现控制溢出,这种情况在输入稍有变化的情况下很容易造成系统崩溃。



(a) WLM S 算法

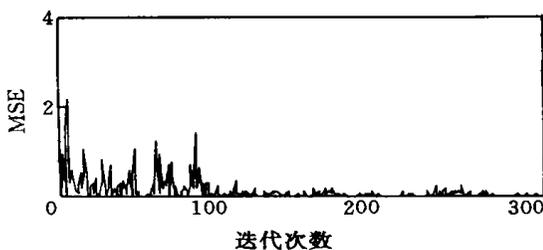


(b) LM S 算法

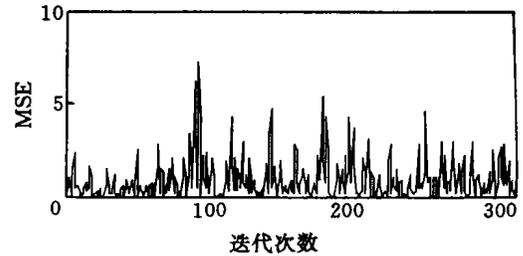
图 5 谐波信号

## 5.3 带限随机噪声

实验中利用 MATLAB 产生一个带限随机噪声作为系统输入,其频率范围是 75~700 Hz,  $\mu_w = \mu_i$



(a) WLM S 算法



(b) LM S 算法

图 6 带限随机噪声

$= 0.02$ , 其它系统参数和控制参数同前。仿真结果如图 6 所示。可见,WLM S 算法在 120 次迭代后已经稳定收敛,而 LM S 算法不但不收敛,反而出现发散现象。

为进一步比较这两种算法,我们给出带限随机噪声,WLM S 算法和 LM S 算法控制输出的频谱(图略)。从频谱图上可以看出,当控制系统达到稳定后,WLM S 算法可将 75~700 Hz 频率范围内的噪声完全控制住;传统的 LM S 算法根本无法达到稳定,没有明显的控制效果,某些频率还出现了控制溢出。

## 6 结 论

本文的研究和仿真实验表明,对于处理频率复杂的信号,WLM S 算法比 LM S 算法具有明显的优势,能够极大地提高系统的性能。WLM S 算法比传统的 LM S 算法稳定性强、收敛速度快。用 WLM S 算法设计的主动噪声控制系统,可在单频、谐波和随机噪声干扰下取得稳定的控制效果。

## 参考文献(References):

- [1] B Widrow. Adaptive signal processing[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985
- [2] Srinath Hosur, Ahmed H Tewfik. Wavelets transform domain LM S algorithm [R]. 0-7803-0946-4/93, IEEE, 1993, III: 488-491
- [3] IDaubechies. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia: SIAM, 1992
- [4] SMallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation [J]. IEEE Trans Pattern Anal Machine Intell, 1989, 11(7): 674-693
- [5] MichelM isiti, YvesM isiti, Georges Oppenheim, et al. Wavelet toolbox user's guide [M]. The Math Works Inc, 1996
- [6] MichelM isiti, YvesM isiti, Georges Oppenheim, et al. Signal processing toolbox user's guide [M]. The Math Works Inc, 1996