

文章编号: 1001-0920(2002)01-0111-03

# 一类线性开关系统的渐近稳定性

刘玉忠, 张霄力, 赵 军

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

**摘 要:** 研究一类线性开关系统的渐近稳定性问题。针对不满足完备性条件的开关系统, 利用 Lyapunov 函数技术, 给出了系统渐近稳定的一个充分条件, 并举例说明了该方法的实际应用。

**关键词:** 线性开关系统; 渐近稳定性; 完备性

**中图分类号:** TP 273      **文献标识码:** A

## Asymptotic stability of a class of linear switched systems

L I U Yu-zhong, Z H A N G X iao-li, Z H A O J un

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** With the Lyapunov function technique, a sufficient condition for the asymptotic stability of a class of linear switched systems is presented without using completeness. An example is given to illustrate the effectiveness of the method.

**Key words:** linear switched systems; asymptotic stability; completeness

## 1 引 言

开关系统是混杂动态系统中一类重要的模型。它存在于很多实际系统中, 如计算机磁盘驱动器, 无线电通讯, 受约束机器人和高速公路控制等<sup>[1-4]</sup>。因而近年来受到人们的普遍重视, 也取得了一些成果和方法。

目前, 开关系统的研究成果大多是关于开关系统稳定性的, 所使用的方法包括 Multi-Lyapunov 函数技术<sup>[5]</sup>, Lyapunov-like 函数<sup>[6,7]</sup>, 平均停留时间<sup>[8]</sup>, 寻找共同的 Lyapunov 函数<sup>[9,10]</sup>等方法。最近, Skafidas<sup>[11]</sup>对于线性连续系统的控制器切换问题, 通过引进完备性的概念, 给出了判断系统稳定性问题的一个条件。但是, 完备性条件的验证是一件非常困

难的事情, 而且满足完备性条件的开关系统极其有限。为此, 本文利用 Lyapunov 函数技术, 研究不满足完备性条件下开关系统的渐近稳定性问题。

## 2 主要结果

考虑如下线性开关系统

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

首先给出完备性的定义及命题<sup>[1]</sup>。

**定义 1** 设  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  为对称矩阵, 则矩阵集  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$  称为完备的, 如果对任意  $x_0 \in R^n$ , 存在  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  使  $x_0^T Z_i x_0 > 0$ 。进一步, 矩阵集  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$  称为严格完备的, 如果对任意  $x_0 \in R^n, x_0 \neq 0$ , 存在  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 使  $x_0^T Z_i x_0 < 0$ 。

收稿日期: 2000-07-06; 修回日期: 2000-10-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(79970114); 教育部骨干教师基金项目; 国家留学回国人员基金项目

作者简介: 刘玉忠(1963—), 男(满族), 辽宁新宾人, 博士生, 从事非线性与混杂系统、开关系统的研究; 赵军(1957—), 男, 辽宁海城人, 教授, 博士生导师, 从事复杂非线性系统结构、混杂动态系统等研究。

**注 1** 从上述定义可以看出,完备性概念是矩阵半负定、负定概念的自然推广。

**命题 1** 若存在正定矩阵  $P$  使  $\{PA_i + A_i^T P\} (i = 1, 2, \dots, k)$  严格完备, 则系统(1)二次稳定。

若记  $\Omega_i = \{x \mid x^T (PA_i + A_i^T P)x < 0\}, i = 1, 2, \dots, k$ , 则易得如下命题:

**命题 2** 若系统(1)全局渐近稳定, 则存在正定矩阵  $P$  及正整数  $i$  使  $\Omega_i \neq \emptyset$ 。

**证明略。**

下面针对不满足完备性条件的系统(1), 给出系统渐近稳定的充分条件。由命题 2, 设矩阵  $P$  不满足命题 1 的完备性条件, 即  $\bigcup_{i=1}^k \Omega_i \neq R^n$ , 但  $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, k)$  不全为空集。不失一般性, 设对任意的正整数  $i, \Omega_i \neq \emptyset$  (若存在某个  $i_0$  使  $\Omega_{i_0} = \emptyset$ , 则在开关切换中可不考虑第  $i_0$  个子系统)。记

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i, \hat{\Omega} = R^n \setminus \{\Omega \cup \{0\}\}$$

其中,  $\partial\Omega$  为  $\Omega$  的边界, 则有如下定理:

**定理 1** 若存在径向无界的向量场  $h(x): \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ , 并且当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $h(x) \rightarrow 0$ , 满足:

- 1)  $h^T P h = x^T P x, x \in \partial\Omega$
- 2)  $h(x)^T P a_{A_i} h(x) < 0, h(x) \in \Omega_i$

则系统(1)全局渐近稳定。

**证明** 定义函数

$$V(x) = \begin{cases} x^T P x, & x \in \Omega \cup \{0\} \\ h(x)^T P h(x), & x \in \hat{\Omega} \end{cases}$$

则当  $x \in \Omega$  时, 必存在某个  $i$  使  $x \in \Omega_i$ , 从而函数  $V(x)$  沿着系统(1)的导数

$$\dot{V}(x) = x^T (PA_i + A_i^T P)x < 0$$

当  $x \in \hat{\Omega}$  时, 由  $h(x)$  的定义知  $h(x) \in \Omega$ , 故必存在某个  $i$  使  $h(x) \in \Omega_i$ 。注意到  $\Omega_i$  的定义及条件 2), 有

$$\dot{V}(x) = h(x)^T (PA_i + A_i^T P)h(x) + 2h(x)^T P a_{A_i} h(x) < 0 \quad (2)$$

再由条件 1) 知, 函数  $V(x)$  在  $R^n$  上是连续的, 从而系统(1)全局渐近稳定。

**注 2** 定理 1 可看成是命题 1 的推广。实际上, 若存在正定矩阵  $P$  使  $\{PA_i + A_i^T P\} (i = 1, 2, \dots, k)$  严格完备, 则取  $h(x) = x$  即满足定理 1 的条件。

**注 3** 对于不满足完备性条件的对称正定矩阵  $P$ , 利用定理 1 设计系统(1)全局渐近稳定的开关策略, 关键是构造向量场  $h(x)$ 。如果  $\Omega$  的边界  $\partial\Omega$  是规则的, 则可构造满足定理条件的  $h(x)$ 。

对于线性开关系统(1),  $\Omega$  的边界  $\partial\Omega$  显然是规则的。为方便起见, 下面仅就  $A_i$  为二阶矩阵的情况讨论  $h(x)$  的构造。引入记号  $\alpha_i$  为与向量  $x$  对应的方向角(从  $x$  轴正向逆时针旋转到向量  $x$  的转角), 以及

$$\tilde{\Omega}_i = \{x \mid x \in \Omega_i, |x| = 1\}$$

$$\tilde{m}_i = \min_{x \in \tilde{\Omega}_i} \{x^T P x\}$$

$$\tilde{M}_i = \max_{x \in \tilde{\Omega}_i} \{x^T P x\}$$

$$\beta_i^m = \{\alpha_i \mid x^T P x = m, x \in \tilde{\Omega}_i\}$$

设  $\hat{\Omega}_i$  与  $\Omega_i, \Omega_2$  左右相邻, 现构造  $h(x): \hat{\Omega}_i \rightarrow \Omega_i$ 。记

$$\begin{cases} \hat{\Omega}_1 = \{x \mid \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_1\} \\ \Omega_1 = \{x \mid \alpha_1 < \alpha_1 < \alpha_2\} \\ \Omega_2 = \{x \mid \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2\} \end{cases} \quad (3)$$

取  $m \in [\tilde{m}_1, \tilde{M}_1] \cap [\tilde{m}_2, \tilde{M}_2]$ , 相应地可得到  $\beta_1^m, \beta_2^m$ 。选取  $\beta (\beta_2 < \beta < \alpha_1)$ , 此时  $\hat{\Omega}_1$  被分为两部分, 即  $\hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_{11} \cup \hat{\Omega}_{12}$ , 其中

$$\hat{\Omega}_{11} = \{x \mid \beta < \alpha_1 < \alpha_1\}$$

$$\hat{\Omega}_{12} = \{x \mid \beta_2 < \alpha_1 < \beta\}$$

**定义**

$$h(x): \hat{\Omega}_{12} \rightarrow \Omega_2 \mid \beta_2^m < \alpha_1 < \beta_2 \subset \Omega_2 \quad (4)$$

使  $\beta_2 < \beta < \beta_2^m$ , 即对任意  $x \in \hat{\Omega}_{12}$ , 先对向量  $x$  进行关于  $x$  轴的对称变换, 再做一个旋转变换。对任意  $x \in \hat{\Omega}_{12}$ , 记  $\alpha = \alpha_1$ , 则上述变换  $h(x)$  可由下面的引理得到:

**引理 1** 设  $\Omega_1 = \{x \mid \alpha_1 < \alpha_1 < \beta\}, \Omega_2 = \{x \mid \beta < \alpha_1 < \beta_2\}$ , 则映射  $\Omega_1$  到  $\Omega_2$  的对称旋转变换为

$$h(x) = \begin{bmatrix} \cos r & \sin r \\ \sin r & -\cos r \end{bmatrix} x \quad (5)$$

其中

$$r = -\alpha + \beta$$

$$a = \frac{\beta_2 - \beta}{\beta - \alpha_1}$$

$$b = \frac{\beta\beta_2 - \alpha_1\beta}{\beta - \alpha_1} - 1$$

**证明略。**

类似可定义  $h(x): \hat{\Omega}_{11} \rightarrow \Omega_1 \mid \{x \mid \alpha_1 < \alpha_1 < \beta_1^m\} \subset \Omega_1$ 。

由  $m$  的取法可知, 这样定义的  $h(x)$  在整个  $\hat{\Omega}_i$  上是连续的, 并且在  $\Omega_1, \Omega_2$  的边界上有  $h(x) = x$ , 从而满足定理 1 的条件 1)。注意到构造  $h(x)$  时, 参数

$m$  及  $\beta$  为可调参数, 因此如能选取适当的  $m$  和  $\beta$ , 使  $h(x)$  满足定理 1 的条件 2), 则可保证系统(1) 的渐近稳定性, 并且  $x_2 = \tan \beta x_1$  即为开关切换的一个超平面。

注 4 记  $g(x) = \partial h(x) / \partial \alpha$ , 易知对于任意的  $k > 0$ , 有

$$g(kx) = kg(x), \quad h(kx) = kh(x)$$

因此, 定理 1 中条件 2) 的验证只需限制在单位圆上即可。

### 3 仿真结果

考虑线性开关系统

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix}$$

令  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1.2 \\ 1.2 & 1.6 \end{bmatrix}$ , 相应地  $\tilde{m}_1 = 0.3632, \tilde{M}_1 = 1, \tilde{m}_2 = 0.064, \tilde{M}_2 = 2.368$ ,

取  $m = 0.8$ , 得  $\beta_1^m = 3.0560, \beta_2^m = 0.0856$ 。记  $\alpha_1 = 0.6435 (\tan \alpha_1 = 0.75)$ , 取  $\beta = \pi/4$ , 则

$$h(x) : \begin{cases} x & | & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta \\ x & | & 0.0856 & \alpha_1 & \alpha_1 \end{cases}$$

经验证, 这样选取的  $h(x)$  满足定理 1 的条件。

类似地, 可在  $\hat{\Omega}$  的其它域上构造相应的  $h(x)$ , 于是得到相应的开关策略, 即当系统轨迹从左侧穿过  $x_2 = x_1$  时, 系统切换到第 2 个子系统; 当系统运行至  $x_2 = -0.3x_1$  时, 再切换到第 1 个子系统(超平面  $x_2 = -0.3x_1$  的选取只需属于  $\Omega_1, \Omega_2$  即可), 开关系统的轨迹以及状态响应见图 1, 图 2。

### 4 结 论

本文讨论不满足完备性条件的线性开关系统的渐近稳定性问题, 给出了系统渐近稳定的充分条件。当系统矩阵  $A_i$  为二阶矩阵时, 给出了定理条件中  $h(x)$  的构造方法, 并举例加以说明, 值得指出的

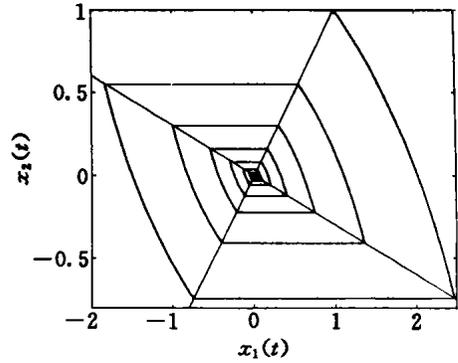


图 1 开关系统的状态轨迹

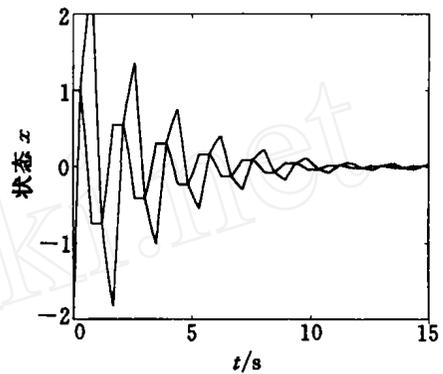


图 2 系统的状态响应曲线

是, 当  $\Omega$  域的边界不规则时,  $h(x)$  的构造难度较大, 也没有一般的方法。

#### 参考文献(References):

- [1] Skafidas E, Evans R J, Savkin A V, et al Stability result for switched controller systems[J]. Automatica, 1999, 35(4): 553-564
- [2] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5): 59-70
- [3] Branicky M S. Stability of switched and hybrid systems [A]. Proc IEEE Conf Decision and Control[C]. Lake Buena, 1994 3498-3503
- [4] 谢广明, 郑大钟. 线性切换系统的能控性和能达性[J]. 控制理论与应用(Control Theory and Appl), 1999, 16(增刊): 135-140
- [5] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. IEEE Trans Automat Contr, 1998, 43(4): 475-482

(下转第 116 页)

其中  $f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|)$ 。当  $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$  时, 系统处于混沌状态。取  $B = I$  为单位阵, 则误差系统为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} e + B \begin{bmatrix} -\alpha(f(x_1) - f(y_1)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + Bu(t)$$

采用定理1中的控制器(4), (5)和自适应律(6)来

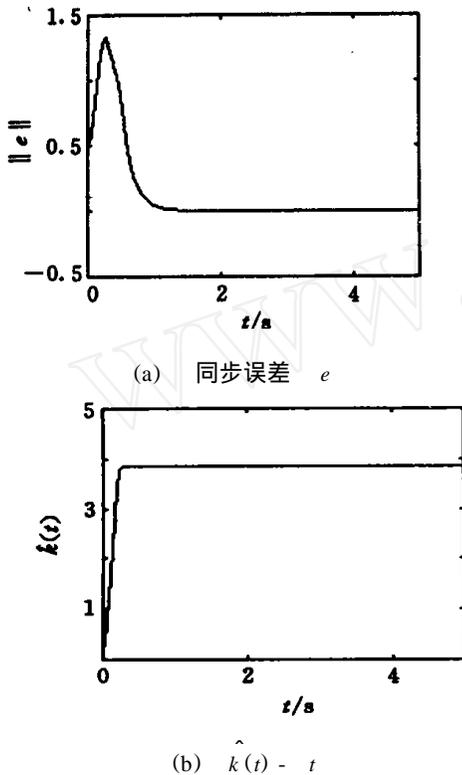


图1 蔡氏电路混沌系统仿真曲线

实现两个蔡氏电路混沌系统间的同步控制, 在式(5)中取  $h_1(t) = \beta e^{-\beta t}, h_2(t) = 0.5e^{-\beta t}$ 。同步误差  $e$  及  $\hat{k}(t) - t$  随时间  $t$  的变化情况如图1所示。由图可以看出, 两个蔡氏电路混沌系统能很好地同步, 同步误差  $e \rightarrow 0$ , 且有  $\hat{k} \rightarrow k_0 = 3.8$ 。

## 5 结 论

本文设计出一种能大范围实现连续时间混沌系统控制与同步的连续自适应控制器, 理论和计算机数值仿真都证明, 无论驱动系统处于何种状态, 在所提出的自适应控制器控制下, 均可使响应系统按驱动系统给定轨道演化, 且该自适应控制器对系统参数不匹配及噪声干扰具有一定的鲁棒性。

### 参考文献(References):

- [1] Chen G. Controlling chaos and bifurcations in engineering systems[M]. Boca Raton: CRC Press FL, 1999.
- [2] Chen G, Deng X. From chaos to order: Perspectives, methodologies and application[M]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [3] Bernardo M D. An adaptive approach to the control and synchronization of continuous-time chaotic systems[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1996, 6: 557-568.
- [4] 卢俊国, 汪小帆, 王执铨. 连续时间混沌系统控制与同步的状态反馈方法[J]. 控制与决策 (Control and Decision), 2001, 16(4): 476-479.
- [5] Yu Xinghuo. Controlling Lorenz chaos[J]. Int J Systems Science, 1996, 27(4): 355-359.
- [6] Chua L O, Yang T, Zhong G Q, et al. Adaptive synchronization of Chua's oscillators[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1996, 6: 189-201.

(上接第113页)

- [6] Peleties P, DeCarlo R. A asymptotic stability of  $m$ -switched systems using Lyapunov-like functions[A]. Proc American Control Conf[C]. Boston, 1991. 1679-1684.
- [7] 刘玉忠, 赵军. 具有  $m$  个开关系统的渐近稳定性[J]. 控制理论与应用 (Control Theory and Appl), 2001, 18(5): 745-747.
- [8] Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time [A]. Proc 38th IEEE Conf Decision and Control[C]. Phoenix, 1999. 2655-2660.
- [9] Ooba T, Funahashi Y. On a common quadratic Lyapunov functions for widely distant systems[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1997, 42(12): 1697-1699.
- [10] Narendra K S, Balakrishnan J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting  $A$ -matrices [J]. IEEE Trans Automat Contr, 1994, 39(12): 2469-2471.