

文章编号: 1001-0920(2002)01-0114-03

# 连续混沌系统控制与同步的自适应方法

卢俊国<sup>1,2</sup>, 魏 荣<sup>1</sup>, 汪小帆<sup>1</sup>, 王执铨<sup>1</sup>

(1. 南京理工大学 自动控制系, 江苏 南京 210094; 2. 上海交通大学 电子信息工程系, 上海 201102)

**摘要:** 提出一种能大范围实现连续混沌系统控制与同步的连续自适应控制器。无论驱动系统处于何种状态, 在连续自适应控制器控制下均可使响应系统按驱动系统给定轨道演化。该连续自适应控制器对系统参数不匹配及噪声干扰具有一定的鲁棒性。蔡氏电路混沌系统的数值仿真说明了所提出方法的有效性。

**关键词:** 混沌; 混沌同步; 混沌控制; 自适应控制

**中图分类号:** TP 27      **文献标识码:** A

## Adaptive approach to controlling and synchronizing continuous-time chaotic systems

LU Jun-guo<sup>1,2</sup>, WEI Rong<sup>1</sup>, WANG Xiao-fan<sup>1</sup>, WANG Zhi-quan<sup>1</sup>

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. Department of Electronics and Information Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 201102, China)

**Abstract:** A continuous adaptive controller is designed for controlling and synchronizing continuous-time chaotic systems. Synchronization of the drive and response systems can be accomplished by using the proposed approach rigorously proved by means of Lyapunov theory and is global regardless of the drive system's state. The proposed approach can tolerate nontrivial parametric mismatches as well as additive noise. The simulation results via Chua's circuit verify the theoretical results.

**Key words:** chaos; synchronization of chaos; control of chaos; adaptive control

## 1 引言

近年来, 混沌控制与混沌同步及其在保密通信、信号处理和生命科学等领域的应用引起了人们的广泛兴趣<sup>[1-6]</sup>。从控制角度研究混沌控制与同步问题可分为两类: 一类是在误差系统中引入控制机制, 使误差系统在零点处渐近稳定, 以达到混沌控制与同步的目的<sup>[3,4]</sup>; 另一类是在受控系统的可获得参数中引入控制机制, 以实现受控系统的输出同步于参考

信号<sup>[5,6]</sup>。

文献[4]将连续混沌系统控制与同步问题统一处理, 在系统非线性是 Lipschitz 非线性条件下, 提出一种非线性反馈控制与同步方法。它能有效地实现两个相同连续混沌系统间平衡点、周期、拟周期、混沌或超混沌状态的控制与同步, 且其控制与同步是大范围的, 但需知 Lipschitz 常数, 且其控制器是不连续的, 在实际实现中存在抖振现象。

本文提出一种能大范围实现连续混沌系统控制

收稿日期: 2000-09-29; 修回日期: 2001-02-21

作者简介: 卢俊国(1975—), 男, 福建龙岩人, 博士生, 从事非线性系统、混沌控制等研究; 王执铨(1939—), 男, 湖北武汉人, 教授, 博士生导师, 从事动态大系统建模与控制、混沌控制等研究。

与同步的连续自适应控制器,解决了文献[4]中Lip-schitz 常数的自适应估计问题以及[4]中控制器和[3]中自适应控制器的不连续问题,使同步控制能以较小的控制能量实现,并使控制对系统参数不匹配及噪声干扰具有一定鲁棒性。最后以蔡氏电路为例,通过数值仿真说明了所提出方法的有效性。

## 2 混沌控制与同步问题的描述和假设

考虑如下两个系统

$$\dot{x} = Ax + B(g(x, t) + u(t)), \quad x(0) \in R^n \quad (1)$$

$$\dot{y} = Ay + Bg(y, t), \quad y(0) \in R^n \quad (2)$$

其中,  $g: R^n \times R \rightarrow R^m, x \in R^n, y \in R^n, u(t) \in R^m, B \in R^{n \times m}, (A, B)$  可控。记  $e(t) = x(t) - y(t)$ , 则控制响应系统(1)与驱动系统(2)同步的问题,就是寻找一个合适控制  $u(t) = h(x, y, t)$ , 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

成立。系统(1)的控制与同步问题可转化为对误差系统进行研究,误差系统为

$$\dot{e} = Ae(t) + B(g(x, t) - g(y, t) + u(t)) \quad (3)$$

假设 1 设系统(1)和(2)中的非线性部分  $g: R^n \times R \rightarrow R^n$  满足 Lipschitz 条件,即

$$g(x, t) - g(y, t) \leq Y \|x - y\|$$

其中,  $x \in \Omega \subset R^n, y \in \Omega \subset R^n, \Omega$  和  $\Omega$  分别为系统(1)和(2)的状态空间,  $Y$  为其 Lipschitz 常数。

注 1 系统(1)具有广泛的应用背景,许多实际混沌系统均由线性和非线性部分组成,如著名的蔡氏电路, Rossler 混沌系统, Lorenz 混沌系统等。在混沌控制和同步化问题中,外加控制的形式在某种情况下可人为选取,这也是混沌控制和同步化问题所具有的特殊性,与以往一般意义下的控制问题有所不同,故可通过人为地选择  $B$  来满足式(1)。

注 2 假设 1 看起来不易做到,其实由于混沌系统的吸引子具有有界性,故几乎所有混沌系统中的非线性都可看作满足 Lipschitz 条件,至少是满足局部 Lipschitz 条件。如蔡氏电路中的非线性满足全局 Lipschitz 条件, Rossler 和 Lorenz 混沌系统中的非线性满足局部 Lipschitz 条件。

## 3 自适应连续控制器设计

为了自适应估计  $Y$  的大小和消除文献[4]中控制器在实际实现中存在的抖振现象,在系统(1)和(2)满足假设 1 的前提下,可得如下定理:

定理 1 若系统(1)和(2)满足假设 1, 控制器  $u(t)$  取为

$$u(t) = -Ke(t) + u_N(t) \quad (4)$$

$$u_N(t) = -\frac{\hat{k}(t)e - B^T M e}{B^T M e - h_1(t)h_2(\hat{k}(t)e)} \quad (5)$$

其中取  $K \in R^{n \times n}$ , 使  $A_c = A - BK$  为 Hurwitz 矩阵; 函数  $h_1 \in C^1$ , 且  $h_1: R^+ \rightarrow R^+$  满足  $\sup_{t \in R^+} h_1(t) < \infty$  和  $\sup_{t \in R^+} \dot{h}_1(t) < 0$ ; 函数  $h_2 \in C^0$ , 且  $h_2: R^+ \rightarrow R^+$  对  $\forall t \in R^+$  满足  $th_2(t) \rightarrow 0.5; \hat{k}(t)$  为假设 1 中  $Y$  的估计, 自适应律为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{k}}(t) &= q B^T M e - e \\ \hat{k}(0) &\in R^+, \quad q \in R^+ \end{aligned} \quad (6)$$

其中对称正定阵  $M \in R^{n \times n}$  满足 Lyapunov 方程  $A_c^T M + MA_c = -Q, Q \in R^{n \times n}$  为对称正定阵。则对任何初始条件  $x(0), y(0) \in R^n$ , 即  $\forall e(0) \in R^n, \hat{k}(0) \in R^+$ , 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V(e, \hat{k}, t) = e^T M e + \frac{1}{q} \tilde{k}^2(t) + h_1(t) \quad (7)$$

式中  $\tilde{k}(t) = \hat{k}(t) - Y$ 。由于  $M$  为对称正定阵, 函数  $h_1 \in C^1$  为  $h_1: R^+ \rightarrow R^+$ , 故  $V(e, \hat{k}, t)$  是正定的。对式(7)沿式(3),(4)和(6)对时间求导,并将控制(4)和(5)代入可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \hat{k}, t) &= e^T M e + e^T M e + 2 \frac{1}{q} \tilde{k}(t) \dot{\tilde{k}}(t) + \dot{h}_1(t) \\ &\quad - e^T Q e - \lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $\lambda_{\min}(Q)$  为  $Q$  的最小特征值。所以  $\forall x(0), y(0) \in R^n$ , 即  $\forall e(0) \in R^n, \hat{k}(0) \in R^+$ , 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。即能大范围实现连续混沌系统(1)和(2)的同步控制。综上所述,定理 1 得证。

注 3 当  $\beta_1, \beta_2 > 0$  时, 函数  $\beta_1 e^{-\beta_1 t}$  和  $0.5 e^{-\beta_2 t}$  分别具有定理 1 中  $h_1(t)$  和  $h_2(t)$  的特性。

## 4 仿真实例

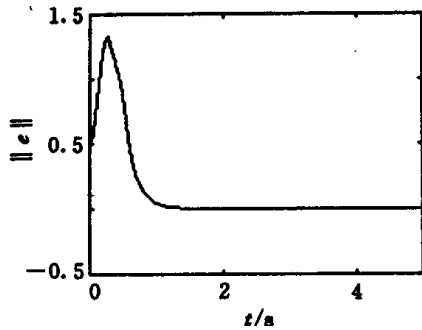
以蔡氏电路混沌系统为例进行数值仿真。描述蔡氏电路的方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bg(x) = \\ & \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} x + B \begin{bmatrix} -\alpha f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

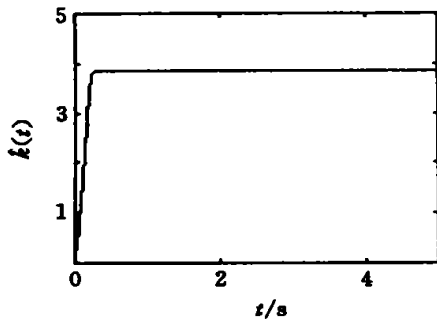
其中  $f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|)$ 。当  $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$  时, 系统处于混沌状态。取  $B = I$  为单位阵, 则误差系统为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} e + B \begin{bmatrix} -\alpha(f(x_1) - f(y_1)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + Bu(t)$$

采用定理 1 中的控制器 (4), (5) 和自适应律 (6) 来



(a) 同步误差  $e$



(b)  $\hat{k}(t) - t$

图 1 蔡氏电路混沌系统仿真曲线

实现两个蔡氏电路混沌系统间的同步控制, 在式 (5) 中取  $h_1(t) = \beta e^{-\beta t}, h_2(t) = 0.5e^{-\beta t}$ 。同步误差  $e$  及  $k(t) - t$  随时间  $t$  的变化情况如图 1 所示。由图可以看出, 两个蔡氏电路混沌系统能很好地同步, 同步误差  $e \rightarrow 0$ , 且有  $k \rightarrow k_0 = 3.8$ 。

## 5 结 论

本文设计出一种能大范围实现连续时间混沌系统控制与同步的连续自适应控制器, 理论和计算机数值仿真都证明, 无论驱动系统处于何种状态, 在所提出的自适应控制器控制下, 均可使响应系统按驱动系统给定轨道演化, 且该自适应控制器对系统参数不匹配及噪声干扰具有一定的鲁棒性。

### 参考文献 (References):

- [1] Chen G. Controlling chaos and bifurcations in engineering systems[M]. Boca Raton: CRC Press FL, 1999.
- [2] Chen G, Deng X. From chaos to order: Perspectives, methodologies and application[M]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [3] Bernardo M D. An adaptive approach to the control and synchronization of continuous-time chaotic systems[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1996, 6: 557-568.
- [4] 卢俊国, 汪小帆, 王执铨. 连续时间混沌系统控制与同步的状态反馈方法[J]. 控制与决策 (Control and Decision), 2001, 16(4): 476-479.
- [5] Yu Xinghuo. Controlling Lorenz chaos[J]. Int J Systems Science, 1996, 27(4): 355-359.
- [6] Chua L O, Yang T, Zhong G Q, et al. Adaptive synchronization of Chua's oscillators[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1996, 6: 189-201.

(上接第 113 页)

- [6] Peleties P, DeCarlo R. Asymptotic stability of  $m$ -switched systems using Lyapunov-like functions[A]. Proc American Control Conf[C]. Boston, 1991. 1679-1684.
- [7] 刘玉忠, 赵军. 具有  $m$  个开关系统的渐近稳定性[J]. 控制理论与应用 (Control Theory and Appl), 2001, 18(5): 745-747.
- [8] Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time[A]. Proc 38th IEEE

- Conf Decision and Control[C]. Phoenix, 1999. 2655-2660.
- [9] Ooba T, Funahashi Y. On a common quadratic Lyapunov functions for widely distant systems[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1997, 42(12): 1697-1699.
- [10] Narendra K S, Balakrishnan J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting  $A$ -matrices[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1994, 39(12): 2469-2471.