第 17 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2002 年 1 月
Vol. 17 No. 1 Control and Decision Jan. 2002

文章编号: 1001-0920(2002)01-0117-03

不确定离散系统的输出反馈保性能控制

陈国定[1,2], 俞 立[1], 杨马英[1], 褚 健[2]
(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032; 2. 浙江大学 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 对一类具有范数有界时变参数不确定性的离散时间系统, 研究设计一个输出反馈保性能控制器, 使得闭环系统对所有允许的不确定性渐近稳定, 且闭环性能指标值不超过某个确定的上界。基于线性矩阵不等式处理方法, 证明了保性能控制器的存在性等价于一个线性矩阵不等式的可行性, 并用该线性矩阵不等式的可行解给出了控制器的构造方法和闭环性能指标的上界。

关键词: 离散系统; 保性能控制; 输出反馈; 线性矩阵不等式; 参数不确定性
中图分类号: TP 273 文献标识码: A

Output feedback guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems

CHEN Guo-ding[1,2], *YU Li*[1], *YANG Ma-ying*[1], *CHU Jian*[2]
(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China;
2. Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: A design procedure for output feedback controllers is derived which renders the closed-loop system to be asymptotically stable and guarantees an upper bound of the given performance cost for all admissible uncertainties. The existence of the guaranteed cost control is shown to be equivalent to the feasibility of a certain linear matrix inequality (LMI), and a full order output feedback controller can be constructed in terms of the feasible solutions to this LMI.

Key words: discrete-time systems; guaranteed cost control; output feedback; LMI; parameter uncertainties

1 引 言

近年来, 考虑鲁棒稳定性和鲁棒性能的不确定系统保性能控制问题引起了人们的关注。研究这一问题的目的是设计一个控制器, 使得闭环不确定系统不仅是鲁棒稳定的, 而且对所有允许的不确定性, 一个给定二次型性能指标的闭环性能值不超过某个确定的上界。基于 Riccati 方程方法和线性矩阵不等式处理方法, 对这一问题提出了不少解决方法[1~3]。但是这些结果都假定系统的状态可以直接测量得到, 设计的是状态反馈保性能控制器。

文献[4]对连续时间系统研究了输出反馈保性能控制问题, 但所得出的结论并非一个完整的线性矩阵不等式问题。而对于不确定离散系统的输出反馈保性能控制问题, 目前尚未有研究结果报道。本文

收稿日期: 2000-08-07; 修回日期: 2001-01-15
基金项目: 国家自然科学基金项目(69974036); 高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划项目
作者简介: 陈国定(1962—), 男, 浙江宁波人, 副教授, 博士, 从事不确定系统的鲁棒控制与应用等研究; 俞立(1961—), 男, 浙江杭州人, 教授, 博士, 从事鲁棒控制、时滞系统的分析与控制等研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

采用线性矩阵不等式处理方法研究这一问题,并提出输出反馈保性能控制器的设计方法。

2 鲁棒性能分析

考虑由如下方程描述的不确定离散系统

$$x(k+1) = [A + H\Delta(k)E]x(k) \tag{1}$$

其中,$x(k) \in R^n$ 是系统的状态变量,$\Delta(k) \in R^{i\times j}$ 是满足 $\Delta'(k)\Delta(k) \le I$ 的未知矩阵,A, H 和 E 是已知常数矩阵。系统的性能指标定义为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x'(k)Qx(k) \tag{2}$$

其中 $Q > 0$ 是给定的加权矩阵。

定义 1 如果对所有允许的不确定矩阵 $\Delta(k)$,对称正定矩阵 P 满足

$$[A + H\Delta(k)E]'P[A + H\Delta(k)E] - P + Q < 0 \tag{3}$$

则矩阵 P 称为系统(1) 和性能指标(2) 的一个二次保性能矩阵。

以下引理揭示了二次保性能矩阵的存在性与系统的二次稳定性之间的关系。

引理 1 若系统(1) 和性能指标(2) 存在一个二次保性能矩阵 P,则系统(1) 是二次稳定的,且对所有允许的不确定矩阵 $\Delta(k)$,性能指标(2) 满足

$$J \le x'(0)Px(0) \tag{4}$$

由式(4) 给出的性能指标的上界依赖于系统的初始状态 $x(0)$,但在实际中一般很难确定系统的初始状态。本文假定系统的初始状态是任意的,但在集合 $S = \{x(0) \in R^n: x(0) = Uv, v'v \le 1\}$ 中,U 是一个已知矩阵,则由式(4) 可得

$$J \le \lambda_{\max}(U'PU) \tag{5}$$

式中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵$(\cdot)$ 的最大特征值。

定理 1 具有性能指标(2) 的系统(1) 存在一个二次保性能矩阵,当且仅当存在常数 $\epsilon > 0$ 和一个对称正定矩阵 V,使得

$$\begin{bmatrix} -V & AV & H & 0 & 0 \\ VA' & -V & 0 & VE' & V(Q^{1/2})' \\ H' & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & EV & 0 & -I & 0 \\ 0 & Q^{1/2}V & 0 & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

进而,若存在常数 $\epsilon > 0$ 和正定矩阵 V,使得矩阵不等式(6) 成立,则 $P = \epsilon V^{-1}$ 是系统(1) 和性能指标(2) 的一个二次保性能矩阵,且 $J \le \epsilon\lambda_{\max}(U'V^{-1}U)$。

证明类似于文献[2] 中主要结论的证明。

3 保性能控制器设计

考虑如下不确定离散时间系统

$$\begin{cases} x(k+1) = [A + H_1\Delta(k)E_1]x(k) + \\ \qquad [B + H_1\Delta(k)E_2]u(k) \\ y(k) = [C + H_2\Delta(k)E_1]x(k) + \\ \qquad [D + H_2\Delta(k)E_2]u(k) \end{cases} \tag{7}$$

其中,$x(k) \in R^n, u(k) \in R^m$ 分别是系统的状态向量和控制输入,$\Delta(k) \in R^{i\times j}$ 是满足 $\Delta'(k)\Delta(k) \le I$ 的未知矩阵,$A, B, C, D, E_1, E_2, H_1$ 和 H_2 是已知的常数矩阵,系统的初始状态 $x(0) \in S$,其中 S 是第 2 节中描述的集合。系统的性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k)] \tag{8}$$

其中 $Q > 0$ 和 $R > 0$ 是给定的加权矩阵。

考虑如下结构的满阶输出反馈控制器

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_c\hat{x}(k) + B_cy(k) \\ \hat{x}(0) = 0, \quad u(k) = C_c\hat{x}(k) \end{cases} \tag{9}$$

其中,$\hat{x}(k) \in R^n$ 是控制器的状态向量,A_c, B_c 和 C_c 是待定的控制器系数矩阵。系统(7) 应用控制器(9) 得到的闭环系统为

$$\bar{x}(k+1) = (\bar{A} + \bar{H}\Delta(k)\bar{E})\bar{x}(k) \tag{10}$$

其中

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_cC & A_c + B_cDC_c \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ B_cH_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = [E_1 \quad E_2C_c]$$

相应的闭环系统性能指标值为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{x}'(k)\bar{Q}\bar{x}(k) \tag{11}$$

其中 $\bar{Q} = \mathrm{diag}\{Q, C_c'RC_c\}$

定义 2 若闭环系统(10) 和性能指标(11) 存在一个二次保性能矩阵 $\bar{P} > 0$,则控制器(9) 称为系统(7) 和性能指标(8) 的一个具有保性能矩阵 $\bar{P} > 0$ 的输出反馈二次保性能控制器。

根据以上定义和第 2 节中的分析,如果控制器(9) 是系统(7) 和性能指标(8) 的一个具有保性能矩阵 $\bar{P} > 0$ 的二次保性能控制器,则该控制器将使系统(7) 鲁棒稳定,且对所有允许的不确定性,闭环系统性能指标值不超过某个确定的上界。

将定理 1 应用于闭环系统(10) 和性能指标(11),容易得到如下定理:

定理 2 系统(7) 存在一个输出反馈二次保性能控制器(9),当且仅当存在一个常数和对称正定矩

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

阵 $\bar{V}$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\bar{V} & \bar{A}\bar{V} & \bar{H} & 0 & 0 \\ \bar{V}\bar{A}' & -\bar{V} & 0 & \bar{V}\bar{E} & \bar{V}\hat{Q}' \\ \bar{H}' & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}\bar{V} & 0 & -I & 0 \\ 0 & \hat{Q}\bar{V} & 0 & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

其中, $\bar{Q} = \hat{Q}'\hat{Q}$, $\hat{Q} = \mathrm{diag}\{Q^{1/2}, R^{1/2}C_c\}$。

在矩阵不等式(12) 中, 控制器系数矩阵 A_c, B_c 和 C_c 与其它未知变量以非线性的方式耦合在一起, 因此很难从式(12) 直接确定这些变量。以下应用文献[5] 中变量变换的思想, 提出输出反馈二次保性能控制器的设计方法。

将矩阵 $\bar{V}$ 及其逆做如下分解

$$V' = \begin{bmatrix} Y & N \\ N' & W \end{bmatrix}, \quad \bar{V}^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M' & Z \end{bmatrix}$$

其中 $X, Y \in R^{n\times n}$ 是对称矩阵。由 $\bar{V}^{-1}\bar{V} = I$ 可得 $MN' = I - XY$。由此关系式, 采用奇异值分解方法, 可由 X 和 Y 求出非奇异矩阵 M 和 N。定义一组新的变量

$$\begin{cases} \hat{A} = XAY + XB\hat{C} + \hat{B}CY + \\ \qquad MA_cN' + \hat{B}D\hat{C} \\ \hat{B} = MB_c \\ \hat{C} = C_cN' \end{cases} \quad (13)$$

则给定正定矩阵 X, Y 及可逆矩阵 M, N, 由 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 可确定矩阵 A_c, B_c 和 C_c。进而通过矩阵运算, 由定理 2 可得如下定理:

定理 3　具有性能指标(8) 的不确定系统(7) 存在形如式(9) 的输出反馈二次保性能控制器, 当且仅当存在常数 $\epsilon > 0$, 对称正定矩阵 X 和 Y, 矩阵 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 满足如下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -X & -I & \cdots & 0 & 0 \\ * & -Y & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & Q^{1/2} & 0 \\ * & * & \cdots & YQ^{1/2} & \hat{C}'R^{1/2} \\ * & * & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & -\epsilon I & 0 \\ * & * & \cdots & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

式中 “*” 处的矩阵块可由矩阵的对称性得到。进而, 若线性矩阵不等式(14) 有解(ϵ, X, Y, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$), 则根据式(13) 可求得 A_c, B_c 和 C_c, 且相应的闭环性能指标值满足

$$J \le \epsilon\lambda_{\max}(U'XU) \quad (15)$$

如果线性矩阵不等式(14) 是可解的, 则其解构成一个凸集。定理 3 给出了用一个凸约束刻画一组输出反馈保性能控制器。不同控制器导出的闭环系统性能指标上界往往是不同的, 而使闭环性能指标值的上界尽可能小的保性能控制器更有意义, 这样的控制器称为最优保性能控制器。依据定理 3, 通过建立和求解如下优化问题, 给出最优输出反馈保性能控制器的设计方法。

$$\min z = \epsilon + \lambda$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 1)\ (14) \\ 2)\ U'XU < \lambda I \end{cases} \quad (16)$$

由矩阵的 Schur 补性质, 问题(16) 中的约束 2) 等价于 $\lambda_{\max}(U'XU) < \lambda$。由于 ϵ 和 $\lambda_{\max}(U'XU)$ 都是非负的, 因此问题(16) 的目的是通过目标函数 $z = \epsilon + \lambda$ 的极小化, 使得性能指标上界(15) 尽可能小, 从而得到最优保性能控制器。问题(16) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 只要保性能控制器存在, 则问题(16) 一定有解, 且能达到全局最优。而在连续系统的类似结论中[4], 寻找最优保性能控制器的最优化问题不是凸的, 所给出的设计算法难以保证其收敛性, 且不能保证其达到全局最优。

注 1　用 $\epsilon + \lambda$ 代替 $\epsilon\lambda_{\max}(U'XU)$ 作为目标函数, 并由式(16) 得到的控制器只能是一个次优保性能控制器, 但却以此换来问题(16) 的凸性。另外, 这样处理也符合保性能控制的设计思想。

参考文献(References):

[1] 俞立, 王景成, 褚健. 不确定离散动态系统的保成本控制[J]. 自动化学报(Acta Automat Sinica), 1998, 24(3): 414-417.

[2] 俞立. 不确定离散系统的最优保性能控制[J]. 控制理论与应用(Control Theory and Appl), 1999, 16(5): 639-642.

[3] Yu Li, Chu Jian. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1155-1159.

[4] Esfahani S H, Petersen I R. An LMI approach to the output-feedback guaranteed cost control for uncertain time-delay systems[A]. Proc of the 37th IEEE Conf on Decision & Control[C]. Tampa, 1998, 2: 1358-1363.

[5] Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. IEEE Trans on Automat Control, 1997, 42(7): 896-911.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net