

文章编号: 1001-0920(2002)02-0171-04

基于李雅普诺夫指数的离散混沌系统的控制研究

姚明海¹, 齐冬莲², 赵光宙²

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310014; 2. 浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027)

摘要: 讨论了通过改变离散混沌系统的李雅普诺夫指数对离散混沌系统进行控制的一种方法。离散混沌系统的李雅普诺夫指数可按需要配置为负值, 从而使系统收敛到任意的期望点上。仿真和实验结果表明, 该控制方法是有效的, 可以实现系统的快速稳定。

关键词: 离散混沌系统; 李雅普诺夫指数; 不动点

中图分类号: TP 27 **文献标识码:** A

On control of discrete-time chaotic systems based on Lyapunov exponents

YAO Ming-hai¹, QI Dong-lian², ZHAO Guang-zhou²

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China; 2. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: A control scheme based on Lyapunov exponents of the systems is proposed for discrete-time chaotic systems. The Lyapunov exponents can be set negative according to the need and the system will be converge to arbitrary fixed point. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method and that systems have perfect performance in the dynamic stability under this scheme.

Key words: discrete-time chaotic systems; Lyapunov exponent; fixed point

1 引言

混沌现象存在于数学、物理、力学、天文学、化学工程、光学和社会学等许多领域, 因此, 混沌作为确定性非线性动力学系统解的重要特征已引起人们的广泛注意^[1]。对某些系统而言, 混沌的出现是有害的, 因此人们总是采用一些方法来消除系统中的混沌。经过近 10 年的研究, 人们已找出一些控制混沌系统的方法, 如 OGY 方法及其改进方法^[2,3]、连续控制方法^[4,5]和工程控制方法^[6-9]等。

研究发现, 系统的李雅普诺夫指数可用来判断

系统是收敛的还是混沌的^[10]。当系统的李雅普诺夫指数中至少有一个为正时, 系统是混沌的; 当系统的李雅普诺夫指数均为负数时, 系统是收敛的。因此, 通过改变系统李雅普诺夫指数的符号, 便可改变系统的运动状态。近几年来, 陈关荣等^[10,11]讨论了将离散非线性系统的李雅普诺夫指数配置为大于零而使系统变成混沌系统的方法。本文则提出通过将离散混沌系统的李雅普诺夫指数配置为负数, 从而实现对离散混沌系统进行控制的一种方法, 利用该方法可将离散混沌系统稳定在任意期望点上。

收稿日期: 2001-06-06; 修回日期: 2001-09-04

作者简介: 姚明海(1963—), 男, 浙江加善人, 副教授, 硕士, 从事混沌控制理论应用、自适应控制等研究; 赵光宙(1946—), 男, 浙江东阳人, 院长, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统控制、预测控制等研究。

2 控制方法

考虑一般的离散混沌系统

$$x_{k+1} = f(x_k) = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, 状态变量 $x_k = (x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \dots \ x_n^{(k)})^T \in R^n$, x_0 已知, 映射 f 连续可微, f 的 Jacobi 矩阵连续且有界。

引理 1^[12] 对于离散系统(1), 如果其映射 f 连续可微, 其 Jacobi 矩阵连续且有界, 则当系统的李亚普诺夫指数中至少有一个为正时, 系统是混沌的; 当系统的李雅普诺夫指数均为负数时, 系统是收敛的。

设系统(1)的期望点为 x^* 。令控制序列 $\{u_k\}_{k=0}^n$ 满足

$$u_k = Bx_k + C \quad (2)$$

其中, B 为待定的 $n \times n$ 常数阵, C 为待定的 $n \times 1$ 常数矩阵。令 B 和 C 满足

$$\begin{cases} B = -J(x^*) + \begin{bmatrix} e^{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\sigma_n} \end{bmatrix} \\ C = -f(x^*) - Bx^* + x^* \end{cases} \quad (3)$$

其中, $J(x^*)$ 为映射 f 在点 x^* 处的 Jacobi 矩阵, $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为设定的负实常数, E 为如下常对角阵

$$E = \begin{bmatrix} e^{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

定理 1 如果离散混沌系统(1)的映射 f 连续可微, 其 Jacobi 矩阵连续且有界, 则在控制序列(2)的作用下, 系统(1)在点 x^* 附近是收敛的, 且对角阵 E 中的 σ_i 即为受控系统的李雅普诺夫指数。

证明 将控制序列 u_k 加入系统(1)的右边, 得

$$x_{k+1} = f(x_k) + u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

将式(3)代入上式, 经整理得

$$x_{k+1} = f(x_k) - f(x^*) + J(x^*)(x^* - x_k) + E(x_k - x^*) + x^* \quad (4)$$

显然, x^* 为系统(4)的不动点。系统(4)在点 x^* 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(x^*) = E \quad (5)$$

矩阵 E 的特征值为 $\{\lambda = e^{\sigma_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$ 。由于 σ_i 均为负实数, 故矩阵 E 对应的特征值 λ 均为小于 1 的正数, 因此不动点 x^* 为系统(4)的稳定不动点。且映射 f 连续可微, 所以系统(4)的状态变量在点 x^* 周围存在一个吸引区域, 由此区域内出发的点, 经过一定次数的迭代后, 均会收敛到期望点 x^* 。

下面证明对角阵 E 中的 σ_i 即为所配置的李雅普诺夫指数^[11]。对于所有的 $j = 0, 1, \dots$, 设

$$T_j(x^*) = J_j(x_j) J_{j-1}(x_{j-1}) \dots J_1(x_1) J_0(x_0) \quad (6)$$

且 $\mu_i(T_j(x^*))$ 为 $T_j(x^*)$ 矩阵的第 i 个奇异值。由矩阵的奇异值定义知, 如果 $\mu_i(T_j(x^*))$ 为 $T_j(x^*)$ 矩阵的第 i 个奇异值, 则存在 $\mu_i(T_j(x^*)) > 0$, 且当 $\mu_i(T_j(x^*)) < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \lim_k \frac{1}{k} \ln \mu_i(T_j(x^*)) \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

为设计控制器, 可以选定

$$\begin{aligned} \mu_i(T_j(x^*)) &= e^{(k+j)\sigma_i} \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

其中 σ_i 为任意设定的常数。

另外, 根据离散系统的李雅普诺夫指数定义^[12], 对于控制系统(4), 当初始点给定时, 系统的 $\{x_k\}_{k=0}^n$ 轨道的第 i 个李雅普诺夫指数定义为

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_k \frac{1}{k} \ln \{ \mu_i(T_k(x_0)) \} = \\ &= \lim_k \frac{1}{k} \ln \{ \mu_i(J_k(x_k) \dots J_1(x_1) J_0(x_0)) \} \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

由式(6) ~ (9) 可以得出, 对于给定的 σ_i , 有

$$\lambda(x_0) = \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

由上述分析可知, 当系统(1)的状态变量在控制区域内时, 在控制序列(2)的作用下, 系统(1)的李雅普诺夫指数变为负数, 系统运动由混沌变为收敛。因此, 利用上述方法可实现对混沌系统的控制, 相应的李雅普诺夫指数 σ_i 可根据具体要求设定。另一方面, 当系统(1)的状态变量不在控制区域内时, 系统(4)有可能发散, 这时一般不对系统(1)进行控制, 系统的状态变量仍按系统(1)进行演变。由于混沌系统具有遍历性, 经过一定次数的演变后, 其状态变量会进入控制区域。这时按式(2)设计控制序列, 将系统(1)的李雅普诺夫指数全部配置为负值, 从而使系统(1)的状态变量按要求收敛到期望点 x^* 上, 实现了系统的混沌控制。

3 仿真研究

本文利用上述控制方法, 对一常见的离散混沌模型——Hénon 映射进行控制研究。Hénon 映射可表示为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (11)$$

其中 a 和 b 为控制参数。系统有两个不动点, 即

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}, \\ & b \frac{(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} \end{aligned} \right\}$$

当系统的控制参数取为 $a = 1.4, b = 0.3$, 初始点为 $(0.1, -0.3)$ 时, 迭代系统方程 5 000 次, 得到系统 (11) 的状态如图 1 所示。由图可见, 系统的状态图存在分形结构, 因此系统 (11) 是混沌的。

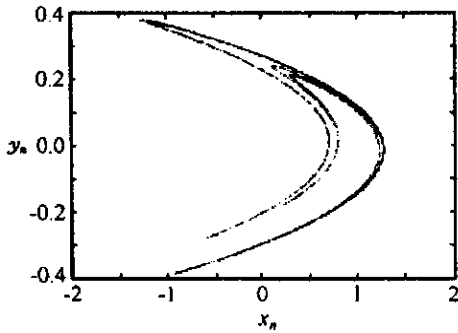


图 1 Hénon 映射轨道

假设要将系统 (11) 的状态值稳定在点 $(0.4, 0.8)$ 上, 此时系统的不动点为 $(0.631 4, 0.189 4), (-0.131 4, -0.039 4)$ 。当系统在期望点 $(0.4, 0.8)$ 附近的两个李雅普诺夫指数都小于零时, 才有可能将系统稳定在期望点上。不妨设 $\sigma_1 = \ln 0.4 - 0.916 3, \sigma_2 = \ln 0.8 - 0.223 1$ 。参数 B, C 和控制序列 u_n 分别为

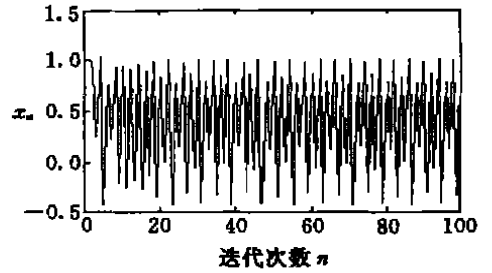
$$B = -J(0.4, 0.8) + \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.52 & -1 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$C = -f(0.4, 0.8) - B \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.984 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$
$$u_n = Bx + C =$$

$$\begin{bmatrix} 1.52 & -1 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.984 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

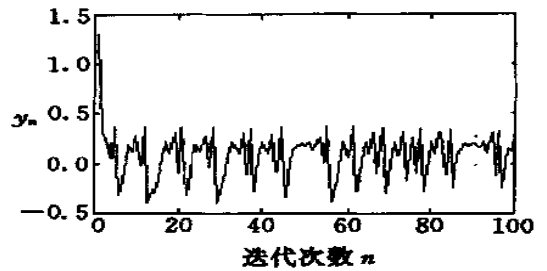
将控制序列 u_n 加入系统 (11), 经整理得

$$\begin{cases} x_{n+1} = -1.4x_n^2 + 1.52x_n + 0.016 \\ y_{n+1} = 0.8y_n + 0.16 \end{cases} \quad (12)$$

设 Hénon 映射 (11) 的初始点为 $(1.0, 1.3)$, 则系统的状态方程如图 2 所示。根据控制理论知识^[13], 求得式 (12) 的控制区域为 $x_n \in (13/70, 228/245), y_n \in (-, +)$ 。当系统状态变量在此控制区域时, 将控制序列 u_n 加入系统 (11), 使整个受控系统的状态方程演变为系统 (12), 得受控 Hénon 映射的

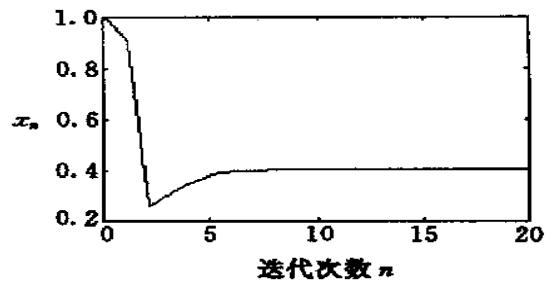


(a) 控制区域 x_n

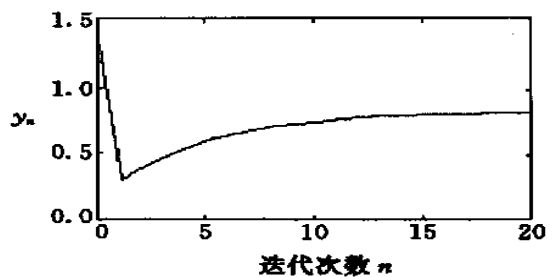


(b) 控制区域 y_n

图 2 原系统状态



(a) 状态变量 x_n



(b) 状态变量 y_n

图 3 受控系统状态

状态如图 3 所示。由图 3 可见, 由于系统的初始点为 $(1.0, 1.3)$, 不满足控制条件, 因此开始时没有对系统进行控制, 系统的状态值根据原系统(11) 进行迭代。迭代 1 次后, 系统的状态值变为 $(0.9, 0.3)$, 已在控制区域内, 这时开始对系统进行控制。迭代 17 次后, 系统的状态变量 y_n 的值稳定在不动点 0.8 上; 迭代 7 次后, 系统的状态变量 x_n 的值稳定在不动点 0.4 上。由此可见, 利用上述控制方法可将 Hénon 映射的状态变量快速稳定在期望点上。

4 结 论

研究表明: 在控制区域内, 将控制器施加到离散混沌系统(1) 上, 可按需要配置系统的李雅普诺夫指数。当李雅普诺夫指数均小于零时, 系统可收敛到任意的期望点上。对 Hénon 映射的控制研究表明, 该控制方法可以实现系统的快速稳定。

参考文献(References):

[1] 陈关荣. 控制非线性动力系统的混沌现象[J]. 控制理论与应用(Control Theory & Applications), 1997, 14(1): 1-6.

[2] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(11): 1196-1199.

[3] Garfinkel A, Spano M L, Ditto W L, et al. Controlling cardiac chaos[J]. Science, 1992, 257(28): 1230-1235.

[4] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback[J]. Phys Lett A, 1992, 170(6): 421-428.

[5] Basso M, Genesio R, Tesi A. Stabilizing periodic orbits of forced systems via generalized pyragas controllers[J]. IEEE Trans on Circ Syst I, 1997, 44(10): 1023-1027.

[6] Brandt M E, Chen G. Feedback control of a quadratic map model of cardiac chaos[J]. Int J Bifurc and Chaos, 1996, 6(4): 715-723.

[7] Chen G, Dong X. On feedback control chaotic dynamical systems[J]. Int J Bifurc and Chaos, 1992, 2(2): 407-411.

[8] Chen G, Dong X. From chaos to order: Perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems[J]. Int J Bifurc and Chaos, 1993, 3(4): 1363-1409.

[9] Yang L, Liu Z. An improvement and proof of OGY method[J]. App Math and Mech, 1998, 19(1): 1-8.

[10] Chen G, Lai D. Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems[J]. Int J Bifurc and Chaos, 1996, 6(7): 1341-1349.

[11] Chen G, Lai D. Making a dynamical system chaotic: Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems[J]. IEEE Trans on Circ Syst I, 1997, 44(3): 250-253.

[12] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D, 1985, 16(2): 285-317.

[13] 褚健. 现代控制理论基础[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1995. 90-92.

(上接第 170 页)

[3] T J Manayathara, T C Tsao, J Bentsman, et al. Rejection of unknown periodic load disturbances in continuous steel casting process using learning repetitive control approach[J]. IEEE Trans Contr Syst Tech, 1996, 4(3): 259-265.

[4] J Paiuk, A Janini, M Remorino, et al. The automatic mould level control for a continuous casting process: Practical implementation of different control algorithms[A]. Proc IFAC Automat in Mining, Mineral and Metal Proc[C]. Buenos Aires, 1989. 205-208.

[5] M S Dussud, Galichet, L P Foulloy. Application of fuzzy logic control for continuous casting mold level control[J]. IEEE Trans Contr Syst Tech, 1998, 6(2): 246-256.

[6] N Kiupel, P M Frank, J Wochnik. Improvement of mold level control using fuzzy logic[J]. Eng Appl of Artif Intell, 1994, 7(5): 493-499.

[7] H X Li, H B Gatland. Conventional fuzzy control and its enhancement[J]. IEEE Trans Syst, Man & Cybern—Part B: Cybern, 1996, 26(5): 791-797.