

文章编号: 1001-0920(2002)02-0178-05

不确定时滞系统的模糊保成本控制

关新平¹, 陈彩莲¹, 刘奕昌¹, 段广仁²

(1. 燕山大学 电气工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2 哈尔滨工业大学 控制工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 研究一类用 T-S 模糊模型描述的不确定时滞系统的鲁棒保成本控制问题。提出了系统存在保成本控制律的充分条件, 基于 LM I 给出了系统设计状态反馈模糊保成本控制器的新方法。仿真结果证明了该方法的有效性。

关键词: T-S 模糊模型; 不确定时滞系统; 保成本控制

中图分类号: TP 13 **文献标识码:** A

Fuzzy guaranteed cost control for uncertain systems with time-delays

GUAN Xin-ping¹, CHEN Cai-lian¹, LIU Yi-chang¹, DUAN Guang-ren²

(1. Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;

2 Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Based on T-S fuzzy model, the fuzzy guaranteed cost control problem is studied for a class of uncertain systems with time-delay. Sufficient conditions are presented for the existence of robust guaranteed cost control law. And a new design method for state feedback fuzzy guaranteed cost controller is proposed by using the LM I approach. The simulation example shows the effectiveness of the presented method.

Key words: T-S fuzzy model; uncertain system with time-delay; guaranteed cost control

1 引言

近年来, 不确定时滞系统由于具有重要的实际意义而成为控制理论的研究热点之一。基于鲁棒稳定性和鲁棒性能的不确定系统保成本控制引起了众多学者的关注, 基于 Riccati 方程和线性矩阵不等式 (LM I) 处理方法取得了许多有价值的结果^[1~5], 然而不确定时滞系统保成本控制问题的结果还不多见。当被控对象含有时滞和不确定性时, 往往还含有

不同程度的非线性, 难以建立精确的模型。因此, 已有的基于线性状态空间模型的结果难以应用于一般的复杂系统。

模糊控制已被证明是复杂非线性系统的有效控制方法^[6~10], 特别是 Takagi 和 Sugeno 提出 T-S 模糊模型^[6]后, 以 If-Then 的规则形式, 充分利用非线性系统局部信息和专家控制经验, 对非线性系统做了很好的逼近^[6]。但逼近精度有赖于模糊规则的增加, 会大大增加模糊推理和分析的复杂性。如果允许

收稿日期: 2000-12-26; 修回日期: 2001-04-19

基金项目: 国家杰出青年基金项目 (69925308)

作者简介: 关新平 (1962—), 男 (满族), 黑龙江齐齐哈尔人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、模糊控制等研究; 陈彩莲 (1979—), 女, 浙江永康人, 硕士生, 从事模糊控制、鲁棒控制的研究。

参数的不确定性存在, 则可大大简化模糊模型, 但必须考虑模糊系统的鲁棒稳定性问题^[7,8]。时滞的存在对系统稳定性要求更为苛刻, 在保证系统稳定的前提下满足给定的性能要求更具实际意义。就作者所知, 目前还没有基于 T-S 模糊模型的保成本控制的结果, 因此, 研究不确定时滞系统的模糊保成本控制具有重要的理论意义和实际应用价值。

本文基于含有不确定性和时滞的 T-S 模糊模型, 给出了系统存在保成本控制律的充分条件和控制器参数的设计方法。所得结论均以线性矩阵不等式的形式存在, 应用 Matlab 中的 LM I 工具箱, 可以方便地设计出保成本控制器。

2 问题描述

参数不确定性时滞系统可用 T-S 模糊模型进行描述, 该模型的第 i 条规则为

$$R^i: \text{ If } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{ig}$$

$$\text{ Then } \begin{cases} \dot{x}(t) = [A_{i0} + \Delta A_{i0}(t)]x(t) + [A_{i1} + \Delta A_{i1}(t)]x(t-h) + B_i u(t) \\ x(t) = \Phi(t), t \in [-h, 0], i = 1 \sim m \end{cases} \quad (1)$$

其中, m 为规则数目, $z_1(t), \dots, z_g(t)$ 为规则前件变量, M_{ij} 为模糊语言值, $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$ 分别为系统的状态向量和控制向量, A_{i0}, A_{i1}, B_i 是适当维数的常数矩阵, $\Delta A_{i0}(t), \Delta A_{i1}(t)$ 表示参数的时变不确定性, $h > 0$ 为系统的滞后时间, $\Phi(t)$ 为系统的状态初始向量。假设系统中时变不确定性满足如下结构形式的范数有界条件

$$\Delta A_{i0}(t) = D_i F_i(t) E_{i0}, \quad \Delta A_{i1}(t) = D_i F_i(t) E_{i1} \quad (2)$$

其中, D_i, E_{i0}, E_{i1} 为已知常阵, $\Omega = \{F_i(t): \alpha_{\max}(F_i(t)) \leq 1, t \in [0, \infty)\}$ 为系统的扰动源。

全局模糊控制系统可写成如下形式

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) \{ [A_{i0} + \Delta A_{i0}(t)]x(t) + [A_{i1} + \Delta A_{i1}(t)]x(t-h) + B_i u(t) \} \quad (3)$$

其中

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_g(t)]$$

$$h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t))}$$

$$\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(z_j(t))$$

$M_{ij}(z_j(t))$ 表示前件变量 $z_j(t)$ 对应于模糊集合 M_{ij} 的隶属度。

本文研究的问题是: 针对给定的不确定模糊时滞系统(1), 设计模糊状态反馈控制器, 使闭环系统鲁棒稳定, 并使对于所有的不确定性, 所选取的成本函数均小于某一上界。

3 主要结果

采用如下形式的模糊控制器

$$R^i: \text{ If } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{ig}$$

$$\text{ Then } u(t) = K_i x(t), \quad i = 1 \sim m \quad (4)$$

其中 K_i 为各条规则的控制增益。

定义 1 对于 T-S 模糊时滞系统(1) 和控制器(4) 构成的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i(z) h_j(z) \{ \bar{A}_{ij} x(t) + \tilde{A}_{ij} x(t-h) \} \\ x(t) = \delta(t), t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\bar{A}_{ij} = (A_{i0} + \Delta A_{i0} + B_i K_j + A_{j0} + \Delta A_{j0} + B_j K_i) / 2$$

$$\tilde{A}_{ij} = (A_{i1} + \Delta A_{i1} + A_{j1} + \Delta A_{j1}) / 2$$

若存在适当维数的正定对称阵 $P > 0, Q > 0, S > 0, R > 0$, 使得对任意允许的不确定性, 均有

$$2x^T P [\bar{A}_{ij} x + \tilde{A}_{ij} x(t-h)] + x^T R x - x^T(t-h) R x(t-h) - (x^T Q x + \min_i (u_i^T S u_i)), \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

则称控制律(4) 为模糊时滞系统(1) 的保成本控制器。

这里所选取的成本函数为

$$J = \int_0^{\infty} \{ x^T Q x + \min_i (u_i^T S u_i) \} dt \quad (7)$$

定理 1 对于任意允许的不确定性, 如果存在适当维数的实对称正定矩阵 P, Q, R, S 和实矩阵 K , 使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega & PM \\ M^T P & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

其中

$$\Omega = Q + U + N$$

$$U = R + (W^T P + P W_{ij} + W_{ji}^T P + P W_{ji}) / 2$$

$$N = (K^T S K_i + K_j^T S K_j) / 2$$

$$W_{ij} = A_{i0} + B_i K_j + D_i F_i E_{i0}$$

则称系统(5) 满足成本函数为式(7) 的保成本控制, 且成本函数 J 有上界

$$J = x^T(0)Px(0) + \int_{-h}^0 x^T(s)Rx(s)ds$$

证明 考虑闭环模糊系统(5), 选取Lyapunov 函数

$$V(x(t)) = x^T Px + \int_{-h}^t x^T(s)Rx(s)ds \quad (9)$$

沿闭环系统的任意运动轨迹的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \times \\ & \begin{bmatrix} U & PM \\ M^T P & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix} = \\ & \sum_{i=1}^m h_i^2 \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{ii}^T P + PW_{ii} + R & PM \\ M^T P & -R \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix} + \sum_{i,j=1, i < j}^m 2h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \times \\ & \begin{bmatrix} U & PM \\ M^T P & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由文献[8] 引理易得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \sum_{i=1}^m h_i^2 \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{ii}^T P + PW_{ii} + R & PM \\ M^T P & -R \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix} + (m-1) \sum_{i,j=1, i < j}^m h_i^2 \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \times \\ & \begin{bmatrix} U & PM \\ M^T P & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x(t-h) \end{bmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

当 $i = j$ 时, 矩阵(8) 即为

$$\begin{bmatrix} Q + K_i^T S K_i + W_{ii}^T P + PW_{ii} + R & PM \\ M^T P & -R \end{bmatrix} < 0$$

由定理条件可得

$$\begin{bmatrix} Z/2 + \bar{\Phi} \bar{D}^T & A_{i1} L_2 & L_1 \bar{E}^T & L_3^T & L_1 & L_1 \\ * & -L_2 & L_2 \bar{E}_1^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2S^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -L_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

成立。其中

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_i \\ K_j \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} E_{i0} \\ E_{j0} \end{bmatrix}$$

$$M = A_{ij} + D_i F_i E_{ij}, \quad V(x(t)) = \sum_{i=1}^m h_i^2 x^T(Q + K_i^T S K_i)x -$$

$$(m-1) \sum_{i,j=1, i < j}^m h_i^2 x^T(Q + N)x \quad (11)$$

利用文献[8] 引理的逆向推导, 考虑到 $u_i = K_i x$, 可将式(11) 转换为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_i h_j [x^T Q x + \\ & (u_i^T S u_i + u_j^T S u_j)/2] \end{aligned}$$

对于模糊基函数 h_i 和 h_j , 满足 $\sum_{i=1}^m h_i h_j = 1, \sum_{i=1}^m h_i = 1$, 且 i 和 j 具有对称轮换性, 则可进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \left[x^T Q x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m h_i u_i^T S u_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m h_j u_j^T S u_j \right] = \\ & \sum_{i=1}^m h_i (x^T Q x + u_i^T S u_i) \\ & - (x^T Q x + \min_i (u_i^T S u_i)) \geq 0 \quad (12) \end{aligned}$$

因此, 模糊控制器(4) 是满足成本函数为式(7) 的保成本控制器。

对式(12) 从 $t = 0$ 积分, 得

$$\int_0^t \{x^T Q x + \min_i (u_i^T S u_i)\} dt = V(x(0)) - V(x(t))$$

既然闭环系统渐近稳定, 因而有 $V(x(t)) = 0$, 成本函数有上界

$$J = x^T(0)Px(0) + \int_{-h}^0 x^T(s)Rx(s)ds$$

定理2 矩阵不等式(8) 成立的充分必要条件是 对任意的 $i, j (i, j = 1 \sim m)$, 存在实数 $\epsilon > 0$ 和适当维数的正定对称矩阵 L_1, L_2, L_3, S, Q , 使得线性矩阵不等式

$$\begin{aligned} \bar{B} &= [B_i \ B_j], \quad \bar{D} = [D_i \ D_j] \\ L_1 &= P^{-1}, \quad L_2 = R^{-1}, \quad L_3 = \bar{K} P^{-1} \\ Z &= (A_{i0} + A_{j0})L_1 + L_1(A_{i0} + \end{aligned}$$

$$A_{j0})^T + \bar{B}L_3 + L_3\bar{B}^T$$

式中 * 表示与右上角对称的矩阵块。进而, 若线性矩阵不等式(13) 有解 $(\epsilon, L_1, L_2, L_3, S, Q)$, 则得相应的保成本模糊控制器参数为

$$K_i = [I \ 0]L_3L_1^{-1}, \quad i = 1 \sim m$$

证明 式(8) 等价于

$$G + \begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix} \bar{F}[\bar{E} \ \bar{E}_1] + [\bar{E} \ \bar{E}_1]^T \bar{F}^T \begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} Q + R + \frac{\Pi}{2} + \frac{\bar{K}^T S \bar{K}}{2} & PA_{i1} \\ A_{i1}^T P & -R \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & F_j \end{bmatrix}$$

$$\Pi = (A_{i0} + A_{j0} + \bar{B} \bar{K})^T P + P(A_{i0} + A_{j0} + \bar{B} \bar{K})$$

由文献[3] 引理 1 知, 上述矩阵不等式成立的充要条件是存在实数 $\epsilon > 0$, 使得

$$G + \epsilon \begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix}^T + \epsilon^{-1} [\bar{E} \ \bar{E}_1]^T [\bar{E} \ \bar{E}_1] < 0 \tag{14}$$

成立。应用 Schur 补引理, 并对得到的矩阵不等式分别左乘和右乘非奇异变换矩阵 T , 即可得到定理 2 中的式(13)。其中 T 定义为 $T = \text{diag}\{P^{-1}, R^{-1}, I, I, I, I\}$ 。

4 仿真实例

在一阶倒立摆的实际控制过程中, 摆杆和小车的连接铰链不可避免地存在摩擦力, 且摩擦力的大小与摆杆质量、小车质量及铰链的连接系数均有关。另外, 摆杆上装有电位器, 用来测量摆杆偏离垂直方向的角度和角度变化律。从电位器测得摆杆状态并转化为电信号, 传输到控制小车的电动机, 输出相应的驱动力, 整个执行过程存在时间滞后现象, 影响了系统的控制效果。为了便于分析和说明, 这里只考虑角度变化律的时间滞后带来的影响, 其运动方程可近似表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 0.025(m + M)x_2(t - \tau) \\ &\quad g \sin(x_1) - am lx_2^2 \sin(2x_1)/2 + \\ \dot{x}_2 &= \frac{0.12am lx_2(t - \tau) - a \cos(x_1)u}{4l/3 - am l \cos^2(x_1)} \end{aligned}$$

其中 $a = 1/(m + M)$, 其它参数的具体意义参见文

献[10] 仿真实例。

我们用含有两条语句的 T-S 模糊模型来表征以上的非线性系统, 即

$$R^1: \text{If } x_1(t) \text{ is about } 0$$

$$\text{Then } \dot{x}(t) = (A_{10} + \Delta A_{10})x(t) + (A_{11} + \Delta A_{11})x(t - \tau) + B_{1u}(t)$$

$$R^2: \text{If } x_1(t) \text{ is about } \pm \pi/2$$

$$\text{Then } \dot{x}(t) = (A_{20} + \Delta A_{20})x(t) + (A_{21} + \Delta A_{21})x(t - \tau) + B_{2u}(t)$$

其中

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - am l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0 & \frac{0.12am l}{4l/3 - am l \beta^2} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{4l/3 - am l} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - am l \beta^2} \end{bmatrix}$$

$$A_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - am l \beta^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{10} = D_{20} = [0 \ 1 \ 0 \ 15]^T$$

$$D_{11} = D_{21} = [0 \ 2 \ 0 \ 23]^T$$

$$E_{10} = [0 \ 24 \ 0 \ 4], \quad E_{20} = [0 \ 14 \ 0 \ 05]$$

$$E_{11} = [1 \ 20 \ 0 \ 23], \quad E_{21} = [0 \ 34 \ 1 \ 03]$$

选取 $F = \sin(t)$, 则可知 $\Delta A_{i0} = D_{i0} F E_{i0}$, $\Delta A_{i1} = D_{i1} F E_{i1} (i = 1, 2)$ 。其中 β 是为了避免系统出现奇异而引入的常数, 取 $\beta = \cos(88^\circ)$ 。

我们采用重心法解模糊, 并采用单点模糊化和乘积推理方法, 隶属函数选为如下形式

$$\begin{aligned} \mu_1(x_1(t)) &= \\ &\left(1 - \frac{1}{1 + \exp(-7(x_1(t) - \pi/4))} \right) \times \\ &\frac{1}{1 + \exp(-7(x_1(t) + \pi/4))} \end{aligned}$$

$$\mu_2(t) = 1 - \mu_1(t)$$

选取 $m = 2.0 \text{ kg}, M = 8.0 \text{ kg}, 2l = 1.0 \text{ m}$, 时间滞后常数 $\tau = 2$ 。根据定理 2 得到相应的控制律为

$$K_1 = [217.662 \ 4 \ 56 \ 940 \ 2]$$

$$K_2 = [259.892 \ 2 \ 68 \ 804 \ 7]$$

初始状态为

$$x_1(t) = 65^\circ, \quad x_2(t) = -1, \quad x_2(t - 2) = -1$$

状态变化曲线如图 1 所示, 过渡过程大约需要 7 s。考虑无时滞系统, 不改变系统的控制律, 简单地

将 τ 取为0,初始状态为 $x_1(t) = 65^\circ, x_2(t) = -3$,可以得到很好的控制效果。仿真结果如图2所示,这也说明含有时间滞后的系统,控制要求更高。

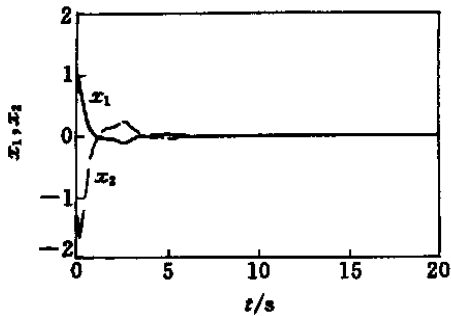


图1 滞后状态初始值不为零时的状态变化曲线

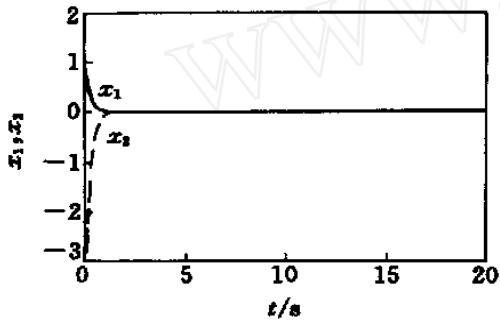


图2 时间滞后为零时的状态变化曲线

5 结 论

本文针对一类采用T-S模糊模型表示的不确定时滞系统,给出了模糊时滞不确定系统保成本控制的定义和保成本模糊控制器存在的充分条件,并利用线性矩阵不等式的形式给出了控制器参数设计方法。所采用的控制器构成模糊规则的一部分,仿真结果验证了该方法的有效性。然而,如何对模型作适当的处理,以更简便的方法找到适合于每个子系统的矩阵 P 和 Q ,还有许多应考虑的方法。如何进一步减少系统控制的保守性将是我们今后所要做的工作。

参考文献(References):

- [1] Petersen IR, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time linear systems[J]. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(9): 1971-1976
- [2] Moheimani S O R, Petersen IR. Guaranteed cost control of uncertain systems with a time multiplied quadratic cost of function: An approach based on linear matrix inequalities[J]. Automatic, 1998, 34(3): 651-654
- [3] Guan X P, Lin Z Y, Duan G R. Robust guaranteed cost control of a class of uncertain time-delay systems[J]. IEE Proc Control Theory Appl, 1999, 146(6): 598-602
- [4] Choi H H, Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed state and controls[J]. Automatica, 1995, 31(11): 1349-1351.
- [5] Yu L. An LM I approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1155-1159
- [6] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans on Syst, Man & Cybern, 1985, 15(2): 116-132
- [7] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H control theory and linear matrix inequalities[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 1-13
- [8] Kang H J, Kwon C, Lee H, et al. Robust stability analysis and design method for the fuzzy feedback linearization regulator[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 6(4): 464-472
- [9] Joh J, Chen Y H, Langari R. On the stability issues of linear Takagi-Sugeno fuzzy models[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 6(3): 402-410
- [10] Chen B S, Tseng C S, Uang H J. Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1999, 7(5): 571-584

(上接第177页)

- [9] Hwang C L, Yoon K. Multiple attribute decision making: Methods and applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [10] Zeleny L. Multiple criteria decision making [M]. New York: McGraw-Hill, 1982
- [11] Steuer R E. Multiple criteria optimization: Theory,

computation and application [M]. New York: John Wiley & Sons, 1986

- [12] Yu P L. Multiple criteria decision making: Concepts, techniques and extensions [M]. New York: Plenum Press, 1985