第17卷 第2期 控 制 与 决 策 2002年3月
Vol. 17 No. 2 Control and Decision Mar. 2002

文章编号: 1001-0920(2002)02-0183-04

H∞设计中的四块问题及应用

王广雄, 李连锋
(哈尔滨工业大学 控制工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 四块问题的 H_∞ 设计可以避免零极点对消。指出选择不同的信号组合, 可以进一步将四块问题直接用于系统的综合。基于这一思路给出了病态对象控制和弱阻尼系统鲁棒镇定的 H_∞ 综合方法, 并结合Benchmark问题给出了算例。

关键词: H_∞设计; 四块问题; 病态对象; 弱阻尼系统
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Four-block problem in H∞ design and its applications

WANG Guang-xiong, LI Lian-feng
(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The pole/zero cancellation can be avoided in four-block design. It is pointed out further that using proper combinations of the signals the four-block problem can be used for dicect synthesis. This design idea is illustrated in H_∞ control of ill-conditioned plant and robust stabilization of lightly damped systems. A design example of Benchmark problem is given.

Key words: H_∞ design; four-block problem; ill-conditioned plant; lightly damped system

1 引 言

H_∞ 设计中常用 S/T(或 S/KS) 混合灵敏度方法, 也称两块问题。但是两块问题存在零极点对消问题[1], 当用于弱阻尼系统或条件数大[2]的对象时, 会导致较差的稳定性和鲁棒性。为避免零极点对消, 设计时可采用四块问题。四块问题是指两入两出的系统, 一般是在有外扰动输入的框图中再加一个量测噪声信号来形成四块问题, 并用两入两出系统传递函数的 H_∞ 范数作为性能指标进行设计[3,4]。用这种加有噪声的性能指标来设计是一种类似于LQG的设计, 通过选择不同的权, 看是否满足设计要求。

本文指出, 在这两入两出的基础上, 选择不同的信号组合, 将两入两出的范数要求分解为两个独立的范数要求, 便可在避免零极点对消的基础上采用 μ 综合法, 按设计要求直接对系统进行综合。

2 四块问题描述

设系统如图1所示, 根据内稳定的概念[5], 在对象 G 和控制器 K 的输出端各加外输入 u_1 和 u_2, 如果

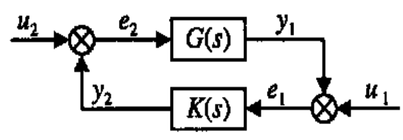

图1 反馈控制系统

收稿日期: 2000-12-18; 修回日期: 2001-04-20
作者简介: 王广雄(1933—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事 H_∞ 控制、高精度伺服系统等研究; 李连锋(1974—), 男, 河南南阳人, 博士生, 从事鲁棒控制、H_∞ 控制的研究。

从 $[u_1^T \quad u_2^T]^T$ 内 $[y_1^T \quad y_2^T]^T$ 的传递函数阵 $T_{yu} \in RH_\infty$, 则该系统稳定。

$$T_{yu} = \begin{bmatrix} GK(I-GK)^{-1} & G(I-KG)^{-1} \\ K(I-GK)^{-1} & KG(I-KG)^{-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

这说明按式(1) 这四块的传递函数来设计, 不会出现零极点对消现象。

为了避免零极点对消, 一般是在干扰输入 u_2 之外再加一量测噪声 u_1, 使之成为四块问题。例如, 文献[4] 在弱阻尼的 Benchmark 算例中就是用此加权 T_{yu} 的 H_∞ 范数作为性能指标进行设计。应该指出的是, 这种在噪声作用下对控制输入加权的性能指标, 需要对不同加权结果进行分析才能确定合适的权值[4], 而不是真正意义上的综合。

注意到图 1 本是反馈控制的典型结构, 图中的一些信号也可用来反映控制系统设计中的一些要求, 所以适当选择输入输出信号, 赋予(1, 1) 块和(2, 2) 块以独立的含义, 就可在避免(零极点/条件数) 对消的基础上解决系统的综合问题, 进一步扩大四块问题的应用范围。

3 病态对象的鲁棒控制

病态对象是指对象 $G(j\omega)$ 的条件数 γ 很大, 而

$$\gamma = \frac{\bar{\sigma}[G(j\omega)]}{\underline{\sigma}[G(j\omega)]}$$

式中 $\bar{\sigma}(G)$ 和 $\underline{\sigma}(G)$ 表示对象的最大和最小奇异值。

设系统的性能用灵敏度 S 表示, 在 H_∞ 设计中就是要求

$$\|W_1 S\|_\infty \leq 1 \quad (2)$$

式中 W_1 为性能的权函数。若同时要求在对象有乘性摄动时具有鲁棒稳定性, 即要求

$$\|W_2 T\|_\infty \leq 1 \quad (3)$$

式中 T 为闭环传递函数, W_2 为对应乘性不确定性的权函数。这两个要求可合写在一起, 即

$$\left\| \begin{matrix} W_1 S \\ W_2 T \end{matrix} \right\|_\infty \leq 1 \quad (4)$$

这就是通常的混合灵敏度问题。但是若对象是病态的, 则这种两块问题的设计结果是控制器的条件数也很大, 这就是一般所说的条件数对消, 系统的鲁棒性很差[2]。

这一问题可用四块问题(图 1) 来解决。设以 e_1 和 y_2 作为输出 z, 于是

$$z = \begin{bmatrix} e_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-GK)^{-1} & G(I-KG)^{-1} \\ K(I-GK)^{-1} & KG(I-KG)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

那么这个传递函数阵 T_{zu} 的(1, 1) 块就是灵敏度 S, (2, 2) 块就是闭环传递函数 T, 故可对 e_1 信号和 y_2 信号分别加权来满足式(2) 和式(3)。设 Δ_2 为乘性不确定性, $\sigma(\Delta_2) < 1$。如果再将性能要求用摄动块 Δ_1 来表示, $\sigma(\Delta_1) < 1$, 那么这个鲁棒设计问题就转换成图 2 的鲁棒稳定问题。

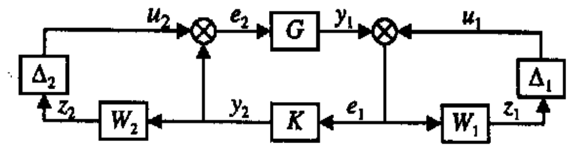

图 2 变换为鲁棒稳定问题

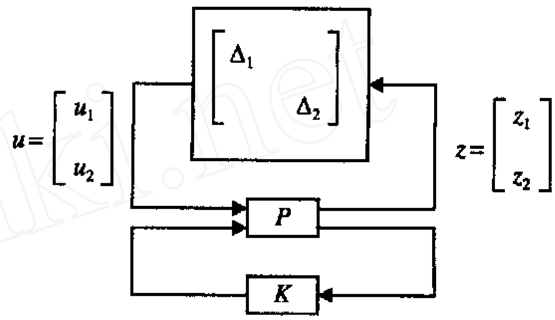

图 3 块对角结构摄动

图 2 可整理成更为紧凑的形式, 如图 3 所示, 图中 P 为加权后的广义对象。图 3 表明, 这个鲁棒稳定问题中的摄动块 $\Delta = \mathrm{diag}[\Delta_1, \Delta_2]$。由于这是对角块的结构, 所以要用结构奇异值 μ 来求解, 即求解

$$\mu[T_{zu}] \leq 1 \quad (6)$$

根据 μ 综合理论[6], 当满足式(6) 时, (1, 1) 块和(2, 2) 块的 H_∞ 范数将分别满足式(2) 和式(3)。

这样, 按式(6) 进行设计, 既满足了混合灵敏度的设计要求, 又因为采用了四块问题, 不会出现条件数对消的问题, 使系统具有良好的鲁棒性能。具体的设计实例可参阅文献[2]。

4 弱阻尼系统的鲁棒镇定

如果将式(1) 输入信号的顺序进行变换, 就会得到另一种四块问题的组合

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(I-KG)^{-1} & GK(I-GK)^{-1} \\ KG(I-KG)^{-1} & K(I-GK)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

为了简化起见, 这里设系统是单入单出(SISO) 的(如果是MIMO, 则可用奇异值来讨论)。

注意到低频段有 $KG \gg 1$, 因此式(7) 的(1, 1)块 $T_{y_1u_2} \approx 1/K(\mathrm{j}\omega)$。如果控制器的低频段是一常值增益 K_c, 就可利用(1, 1) 块来约束 K_c。又因为高频段 $KG \ll 1$, 故可利用(2, 2) 块来限制 $K(\mathrm{j}\omega)$ 的高频段增益。因此, 如果对控制器增益 K_c 有要求, 并要求限制 $K(\mathrm{j}\omega)$ 的高频增益, 就可对(1, 1) 块和(2, 2) 块的 H_∞ 范数加以约束, 形成类似于图 3 的结构奇异值问题来求解。

弱阻尼系统的镇定问题中就存在这种设计要求。这里的弱阻尼是指阻尼非常小的谐振模态, 是挠性结构的主要特征。在控制问题中, 这种谐振模态是一种高频模态, 设计时应将对象刚性部分所构成的动态特性作为系统的主导动态特性, 其主导极点(模值) 应小于谐振模态, 否则带宽太宽, 将导致控制输入 u 很大。所以对挠性结构控制来说, 主导极点应取得尽可能大, 但又不能超过谐振模态。主导极点是由控制器的增益 K_c 决定的。

控制器中的微分作用会将频率特性抬高而加大带宽。所以, 一方面要根据主导极点的要求, 规定控制器的增益 K_c; 另一方面应尽量压低控制器高频特性, 以保证系统的主导极点小于谐振模态。这种设计思想可用式(7) 的四块问题来实现: 对(1, 1) 块加权形成 H_∞ 范数约束, 使控制器具有给定的增益 K_c; 对(2, 2) 块的加权值则在 H_∞/μ 综合的迭代寻优过程中逼近其最大值, 以得到尽可能低的 $K(\mathrm{j}\omega)$ 高频增益。这是典型的有约束的 H_∞ 优化设计, 是一种综合法, 不同于一般的试凑法。

下面以一Benchmark 问题[7] 为例, 进一步说明这一设计过程。

5　设计示例

设有图4所示的小车/弹簧系统, 控制力 u 作用于小车 1, 位置传感器则在小车 2 上, 小车 2 的位置 x_2 是被控制量 y。

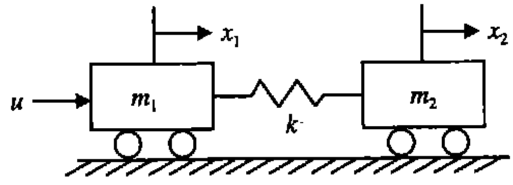

图 4　带有不确定参数的小车/弹簧系统

设小车质量 $m_1 = m_2 = 1$, 弹簧常数 k 为不确定参数, $0.5 \le k \le 2.0$。小车系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{k}{s^2(s^2 + 2k)} \tag{8}$$

式(8) 表明, 该系统有一个刚体运动模态和一个振动模态, 传递函数的 4 个极点都在虚轴上。

现根据上节的思路, 对式(7) 的(1, 1) 块加权 W_1 形成对控制器增益 K_c 的约束, 即

$$\| W_1 G(I - KG)^{-1} \|_\infty \le 1 \tag{9}$$

对(2, 2) 块加权 W_2 形成对控制器高频段增益的限制, 即

$$\| W_2 K(I - GK)^{-1} \|_\infty \le 1 \tag{10}$$

本例中还有参数 k 的不确定性问题, 取

$$k = k_0 + \Delta k \Delta_k = 1.25 + 0.75\Delta_k, \quad |\Delta_k| < 1$$

根据 k 在方程中的位置, 引入两个变量: d 和 e, 将不确定性与系统方程的确定性部分分开。其中, d 为不确定性块 Δ_k 的输出信号, e 为 Δ_k 的输入信号。系统方程则对应增加一个输入 d 和输出 e。现在广义对象 P_Δ 的输入为 $w = [d \quad u_2 \quad u_1]^{\mathrm{T}}$, 输出为 $z = [e \quad y_1' \quad y_2']^{\mathrm{T}}$。本例的 H_∞ 标准问题框图如图 5 所示, 图中 y_1' 和 y_2' 是对应图 1 中 y_1 和 y_2 的加权输出, 即

$$y_1' = W_1 y_1, \quad y_2' = W_2 y_2$$

广义对象 P_Δ 的状态空间方程为

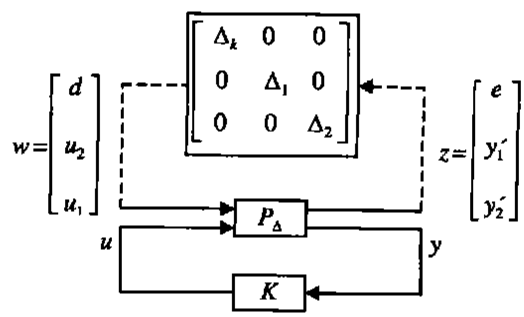

图 5　算例中的 H_∞ 标准问题框图

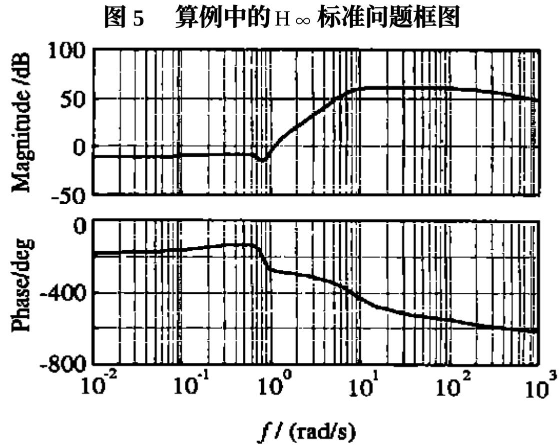

图 6　设计所得的 H_∞ 控制器 Bode 图

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ e \\ y_1' \\ y_2' \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.25 & 1.25 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1.25 & -1.25 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & -0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ d \\ u_2 \\ u_1 \\ u \end{bmatrix} \tag{11}$$

设从 d 到 e 的闭环传递函数为 T_{ed}, 根据小增益定理, 鲁棒稳定性的条件是

$$\| T_{ed} \|_\infty \leq 1 \tag{12}$$

式(12) 就是整个问题 H_∞ 优化设计中的鲁棒稳定性约束。

图 5 中的 Δ 是块对角结构, 所以本例要用 μ 综合法来求解。设 T_{zw} 是从 w 到 z 的传递函数, μ 综合优化设计是在式(9) 和式(12) 这两个约束下求取 W_2 的最大值, 使

$$\begin{cases} \min \| \mu[T_{zw}] \|_\infty = 1 \\ \| \mu[T_{zw}] \|_\infty := \sup\limits_{\omega} \mu[T_{zw}(j\omega)] \end{cases} \tag{13}$$

这种有约束的优化设计结果是在式(10) 的 W_2 取最大值下, 使

$$\| W_2 K (I - GK)^{-1} \|_\infty = 1 \tag{14}$$

以达到使高频段 $|K(j\omega)|$ 尽可能小的目的, 并使式(9) 的约束等于 1, 即

$$\| W_1 G (I - KG)^{-1} \|_\infty = 1 \tag{15}$$

由于低频段有 $KG \gg 1$, 所以根据第 4 节可知, 式(15) 意味着 $W_1 / K_c = 1$。本例中随着 k 的变化, 对象的谐振模态在 1～ 2 rad/s 之间变化, 所以根据上节的分析, 系统的主导极点(模值) 应小于 1。考虑到控制规律中微分规律会抬高带宽, K_c 宜按 0.3 来设计, 故根据式(16) 取权系数 $W_1 = 0.3$。据此求解式(13), 得到 W_2 的最大值为 0.9×10^{-3}。

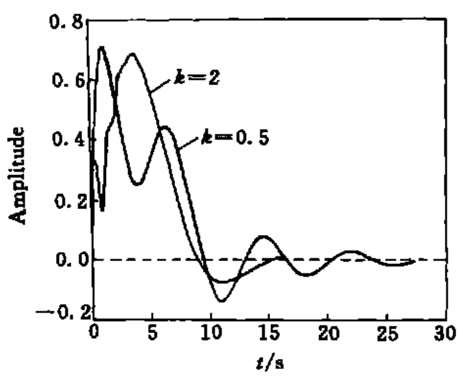

图 7 k = 0.5 和 k = 2.0 时系统的脉冲扰动响应

图 6 是所得控制器的 Bode 图, 从图可以读得控制器的静态增益 $K_c = 0.297$, 达到了预定的设计指标。由图可得 $K(j\omega)$ 的最大值为 1.1×10^3, 也符合式(14) 优化设计的结果。图 7 是参数摄动下的脉冲响应曲线(单位脉冲扰动加在小车 2 上)。

6 结 论

1) H_∞ 的四块问题可避免零极点对消, 如果在四块问题的基础上选择不同的信号组合, 还可进一步将四块问题直接用于系统的综合。

2) 对于 Benchmark 这种挠性结构的控制问题, 应使系统的主导极点小于谐振模态。这种设计要求和约束可以转化为四块问题, 是用四块问题进行综合的一个典型例子。而且可以将其扩展, 成为包括参数摄动的鲁棒镇定问题, 如文中算例所示。

参考文献(References):

[1] Safton J, Glover K. Pole/zero cancellation in the general H_∞ problem with reference to a two block design[J]. Syst Contr Lett, 1990, 14: 295-306.

[2] 杨志勇, 王广雄. 病态对象的鲁棒性能设计[J]. 控制理论与应用(Control Theory and Appl), 1998, 15(4): 627-630.

[3] Hirata M, Liu K Z, Mita T, et al. Head positioning control of a hard disk drive using H_∞ theory[A]. Proc of the 31st CDC[C]. Tucson, 1992. 2460-2461.

[4] Braatz R, Morari M. Robust control for a noncollocated spring-mass system[J]. J Guid, Contr & Dyn, 1992, 15(5): 1103-1110.

[5] Glover K, Sefton J, Mcfarlane D C. A tutorial on loop shaping using H-infinity robust stabilization[A]. IFAC 11th World Congress[C]. Tallinn, 1990. 117-126.

[6] Packard A, Doyle J. The complex structured singular value[J]. Automatica, 1993, 29(1): 71-109.

[7] Wie B, Bernstein D S. Benchmark problems for robust control design[J]. J Guid, Contr & Dyn, 1992, 15(5): 1057-1059.