第 17 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 2002 年 3 月
Vol. 17 No. 2 Control and Decision Mar. 2002

文章编号: 1001-0920(2002) 02-0191-03

非线性 H_∞ 可靠控制器的参数化

伏玉笋, 田作华, 施颂椒
(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘 要: 研究具有严格冗余执行机构的非线性 H_∞ 状态反馈可靠控制器的参数化问题, 基于 Hamilton-Jacobi 不等式, 构造出一簇控制器, 使得当有一个执行机构失效时, 闭环系统仍渐近稳定且 L_2 增益有限。所得结果为非线性 H_∞ 状态反馈可靠控制的综合提供了更深的视角。

关键词: 非线性系统; H_∞ 理论; 可靠控制; Hamilton-Jacobi 不等式
中图分类号: TP 273 文献标识码: A

Parameterization of reliable nonlinear H_∞ controllers

FU Yu-sun, TIAN Zuo-hua, SHI Song-jiao
(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The parameterization problem of the reliable nonlinear H_∞ state feedback controllers for nonlinear systems with strictly redundant actuators is dealt with. Based on Hamilton-Jacobi inequality, a family of controllers are presented such that the resulting closed loop systems are asymptotically stable and their L_2-gain is limited not only when all actuators are operational but also when any one (but only one) of actuators experiences an outage. The results provide a deeper insight into the synthesis of the reliable nonlinear H_∞ state feedback.

Key words: nonlinear system; H_∞ theory; reliable control; Hamilton-Jacobi inequality

1 引　　言

如何提高系统可靠性一直是工程控制界研究的中心课题之一。文献[1～3] 研究了基于各种控制目标的线性系统, 特别是文献[1] 给出了基于 Riccati 方程的线性 H_∞ 理论的设计方法, 使得当有控制元件失效时闭环系统仍渐近稳定且增益有限。近年来, 人们基于非线性 H_∞ 理论, 将线性系统的结果推广到非线性系统[4, 5]。

通常在设计控制系统时, 除了强调内部稳定和扰动衰减外, 还有其它设计目标需要满足, 解决这些更复杂控制问题的方法之一是寻找控制器的集合, 使得除能解决 H_∞ 控制问题外, 还能满足其它设计目标, 因此控制器的参数化一直为人们所重视[6～8]。本文研究具有严格冗余执行机构的非线性 H_∞ 状态反馈可靠控制器的参数化问题, 构造出一簇控制器, 使得当有一个执行机构失效时, 闭环系统仍渐近稳定且 L_2 增益有限。所得结果为非线性 H_∞ 状态反馈可靠控制的综合提供了更深的视角。

2 问题描述和预备知识

考虑如下非线性系统

收稿日期: 2000-09-14; 修回日期: 2000-12-21
作者简介: 伏玉笋(1972—), 男, 甘肃秦安人, 博士生, 从事鲁棒控制和非线性控制的研究; 施颂椒(1933—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、自适应控制和非线性控制等研究。

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x) + g_1(x)\omega + \sum_{j=1}^{m} g_{2j}(x)u_j \\ z = [h^{\mathrm{T}}(x) \quad u_1 \quad \cdots \quad u_m]^{\mathrm{T}} \\ y = x\end{cases} \tag{1}$$

其中, $x \in R^n$ 是定义在原点某邻域 X 上的状态向量, $u = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m]^{\mathrm{T}} \in R^m$ 是控制向量, $\omega \in R^q$ 是扰动向量, $z \in R^{s=p+m}$ 是参考输出向量, y 是测量向量(假设等于 x); $f(x)$, $g_1(x)$, $g_{2j}(x)(j = 1,2,\cdots,m)$ 和 $h(x)$ 是定义在邻域 X 上具有合适维数的光滑函数, 且满足 $f(0) = 0, h(0) = 0$。为简便起见, 令 $g_2(x) = [g_{21}(x) \quad g_{22}(x) \quad \cdots \quad g_{2m}(x)]$。

本文拟解决的问题是: 对于给定的 $\gamma > 0$, 当有一个执行机构失效时, 要求设计的控制器能使闭环系统(1) 仍渐近稳定($\omega = 0$ 时), 且 L_2 增益 $\leq \gamma$(有关定义参阅文献[9])。本文将这一问题称为非线性 H_∞ 可靠控制可解问题。

定义1 $F(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \cdots \quad f_m(x)]: X \to R^{n\times m}$ 是一个光滑矩阵函数, 如果 m 列向量 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 是相关的, 但任何 $m-1$ 列向量是不相关的, 则说矩阵 $F(x)$ 是严格冗余的。

定义2 $e(x): X \to R^m$ 是 $e(0) = 0$ 的光滑函数, 如果存在光滑矩阵函数 $E^0(x)$, 使得 $e(x) = E^0(x)x$ 且 $E^0(x)$ 是严格冗余的, 则说 $e(x)$ 是严格冗余的。

引理1[4] 1) 如果 $F(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \cdots \quad f_m(x)]: X \to R^{n\times m}$ 是严格冗余的, 则存在光滑标量函数 $0 < \delta_F(x) < 1 (\forall x \in X)$, 使得

$$f_i(x)f_i^{\mathrm{T}}(x) \leq \delta_F(x)F(x)F^{\mathrm{T}}(x)$$
$$i = 1,2,\cdots,m \tag{2}$$

2) 如果 $e(x) = [e_1(x) \quad e_2(x) \quad \cdots \quad e_m(x)]^{\mathrm{T}}: X \to R^m$ 是严格冗余的, 则存在光滑标量函数 $0 < \delta_e(x) < 1 (\forall x \in X)$, 使得

$$e_i^2(x) \leq \delta_e(x)e(x)e^{\mathrm{T}}(x), \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{3}$$

定义3[10] 设 $f(0) = 0, h(0) = 0$。如果存在 $x = 0$ 的邻域 U, $x(t)$ 是 $\dot{x} = f(x)(x(0) \in U)$ 的积分曲线, 由 $h(x(t)) = 0 (\forall t \geq 0)$ 可得 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, 则称 $\{f, h\}$ 是局部可检测的。

3 主要结果

本文假设 $g_2(x)$ 是严格冗余的, 由引理1知, 存在 $0 < \delta_{g2}(x) < 1$, 使得 $g_{2j}(x)g_{2j}(x)^{\mathrm{T}} \leq \delta_{g2}(x)g_2(x)g_2(x)^{\mathrm{T}}$ 成立。

3.1 存在可靠控制器的充分条件及控制器的形式

定理1 考虑系统(1), 设 $\{f, h\}$ 是可检测的。如果存在定义在 R^n 中原点附近的光滑正定函数 $V(x)(V(x) > 0, V(x(0)) = 0)$, 使得如下 Hamilton-Jacobi 函数

$$H_1(x) =$$
$$V_x(x)f(x) + \gamma^2\omega_*(x)^{\mathrm{T}}\omega_*(x) -$$
$$(1 - 2\delta_{g2}(x))u_*(x)^{\mathrm{T}}u_*(x) + h(x)^{\mathrm{T}}h(x) \tag{4}$$

在 $x = 0$ 附近半负定, 其中

$$\omega_*(x) = \frac{1}{2\gamma^2}g_1(x)^{\mathrm{T}}V_x(x)^{\mathrm{T}}$$

$$u_*(x) = -\frac{1}{2}g_2(x)^{\mathrm{T}}V_x(x)^{\mathrm{T}}$$

则使系统(1) 可靠控制问题可解的控制器为

$$u = u_*(x) \tag{5}$$

证明 设第 j 个执行机构失效, 即 $u_j = 0$, 则系统(1) 变成如下非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x) + g_1(x)\omega + g_2^j(x)u^j \\ z^j = [h(x)^{\mathrm{T}} \quad u^{j\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{6}$$

其中

$$g_2^j(x) = [g_{21}(x) \quad \cdots \quad g_{2j-1} \quad g_{2j+1} \quad \cdots \quad g_{2m}]$$
$$u^j = [u_1 \quad \cdots \quad u_{j-1} \quad u_{j+1} \quad \cdots \quad u_m]^{\mathrm{T}}$$

沿系统(6) 的轨迹有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = {}& V_x(x)f(x) + V_x(x)g_1(x)\omega + \\ & V_x(x)g_2^j(x)u^j = \\ & V_x(x)f(x) + V_x(x)g_1(x)\omega + \\ & V_x(x)g_2(x)u - V_x(x)g_{2j}(x)u_j \leq \\ & V_xf + V_xg_1\omega + V_xg_2u + \\ & \frac{1}{4}V_xg_{2j}g_{2j}^{\mathrm{T}}V_x^{\mathrm{T}} + u_j^2 \leq \\ & V_xf + V_xg_1\omega + V_xg_2u + \\ & \frac{1}{4}\delta_{g2}(x)V_xg_2g_2^{\mathrm{T}}V_x^{\mathrm{T}} + u_j^2\end{aligned}$$

当 $\omega = 0, u = u_*(x)$ 时, 由定理1的条件和 $u_{*j}^2 \leq u_*^{\mathrm{T}}u_*$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leq {}& V_xf + \left\|u + \frac{1}{2}g_2^{\mathrm{T}}V_x^{\mathrm{T}}\right\|^2 - u_*^{\mathrm{T}}u_* - \\ & (1 - \delta_{g2}(x))u_*^{\mathrm{T}}u_* + u_j^2 \leq \\ & -\gamma^2\omega_*(x)^{\mathrm{T}}\omega_*(x) - h(x)^{\mathrm{T}}h(x) - \\ & u_*(x)^{\mathrm{T}}u_*(x) + u_j^2 \leq 0\end{aligned}$$

而 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = 0$ 意味着 $h(x(t)) = 0$。由 $\{f, h\}$ 是局部可检测的, 可得 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$。由 LaSalle 不变原理知闭环系统(6) 渐近稳定。

另一方面

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t + \|z^j\|^2 - \gamma^2\|\omega\|^2 =$$
$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t + h^{\mathrm{T}}h + u^{j\mathrm{T}}u^j - \gamma^2\|\omega\|^2 \leq$$

$$
\begin{aligned}
&V_x f + V_x g_1\omega + V_x g_2 u + \\
&\frac{1}{4}\delta_{g2} V_x g_2 g_2^{\mathrm T} V_x^{\mathrm T} + \|u\|^2 + h^{\mathrm T}h - \gamma^2\|\omega\|^2 = \\
&V_x f + \frac{1}{4\gamma^2} V_x g_1 g_1^{\mathrm T} V_x^{\mathrm T} - \\
&\frac{1}{4}(1-\delta_{g2}) V_x g_2 g_2^{\mathrm T} V_x^{\mathrm T} + h^{\mathrm T}h + \\
&\left\|u + \frac{1}{2} g_2^{\mathrm T} V_x^{\mathrm T}\right\|^2 - \left\|\gamma\omega - \frac{1}{2\gamma} g_1^{\mathrm T} V_x^{\mathrm T}\right\|^2
\end{aligned}
$$

当 $u = u_*(x)$ 时, 则由定理 1 的条件可知

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t + \|z^j\|^2 - \gamma^2\|\omega\|^2 \le 0$$

对上式两边积分得

$$V(x(T)) - V(x(0)) + \int_0^T(\|z^j\|^2 - \gamma^2\|\omega\|^2)\,\mathrm{d}t \le 0$$

从而有 $$\int_0^T \|z^j\|^2 \mathrm{d}t \le \int_0^T \gamma^2\|\omega\|^2\mathrm{d}t$$ □

3.2　可靠控制器的参数化

解决非线性 H_∞ 可靠控制问题的一簇状态反馈控制器构造如下

$$
\begin{cases}
\dot{\xi} = f(\xi) + g_1(\xi)\omega_*(\xi) + \\
\qquad g_2(\xi)[u_*(\xi) + c(\eta)] \\
\dot{\eta} = a(\eta) + b(\eta)(x - \xi) \\
u = u_*(x) + c(\eta)
\end{cases}
\tag{7}
$$

其中, $\xi \in R^n$ 和 $\eta \in R^q$ 定义在原点附近的邻域上; $a(\eta)$, $b(\eta)$ 和 $c(\eta)$ 是具有合适维数的光滑函数, 且 $a(0) = 0$, $c(0) = 0$。问题是如何确定参数 $a(\eta)$, $b(\eta)$ 和 $c(\eta)$, 使得闭环系统(1) 和(7) 非线性 H_∞ 可靠控制问题可解。

定理 2　设定理 1 中的条件成立。如果存在定义在 R^{2n+q} 中原点附近的光滑函数 $W(x_e)$ 关于 $(x-\xi,\eta)$ 是正定的($W(x_e) > 0$, 当 $x_e = [x^{\mathrm T}\ \ x^{\mathrm T}\ \ 0]^{\mathrm T}$ 时 $W(x_e) = 0$), 使得 Hamilton-Jacobi 函数

$$
\begin{aligned}
&H_2(x_e) = \\
&W_x f_e(x_e) + c(\eta)^{\mathrm T}c(\eta) + \\
&\frac{1}{4\gamma^2} W_{x_e} g_e(x_e) g_e(x_e)^{\mathrm T} W_{x_e}^{\mathrm T} + \\
&\frac{1}{2} W_{x_e}
\begin{bmatrix}
\delta_{g2}(x) g_2(x) g_2(x)^{\mathrm T} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
W_{x_e}^{\mathrm T}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

关于 $(x-\xi,\eta)$ 是负定的($H_2(x_e) < 0$, 当 $x_e = [x^{\mathrm T}\ \ x^{\mathrm T}\ \ 0]^{\mathrm T}$ 时 $H_2(x_e) = 0$), 那么一簇控制器(7) 可解决非线性 H_∞ 可靠控制问题。证明略。

定理 2 给出了解决非线性 H_∞ 状态反馈可靠控制问题的一个更一般的框架。从某种意义上说, 除了要满足定理 2 中的条件外, $a(\eta)$, $b(\eta)$ 和 $c(\eta)$ 并没有规定。这些参数提供的自由度对于实现其它方面的控制性能大有裨益。

3.3　参数化可靠控制系统的可降阶性

虽然定理 2 给出了一族解(不是全部解), 但需要解决 $2n + q$ 维问题。如果下面的定理成立, 则可降低 n 维, 变为解决 $n + q$ 维问题。

定理 3　设定理 1 中的条件成立且对于系统

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix}\dot{\Psi} \\ \dot{\eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\Psi) + g_1(\Psi)\omega_*(\Psi) + g_2(\Psi)u_*(\Psi) \\ a(\eta) + b(\eta)\Psi \end{bmatrix} + \\
\qquad \begin{bmatrix} g_1(\Psi) \\ 0 \end{bmatrix} r \\
\phi = c(\eta)
\end{cases}
\tag{9}
$$

其中 $a(0) = 0$, $c(0) = 0$, 存在定义在原点 $(\Psi,\eta) = (0,0)$ 附近某邻域上的光滑正定函数 $Q(\Psi,\eta): R^n \times R^q \to R$, 使得 Hamilton-Jacobi 函数

$$
\begin{aligned}
&H_3(\Psi,\eta) = \\
&[Q_\Psi\ \ Q_\eta] \times \\
&\begin{bmatrix} f(\Psi) + g_1(\Psi)\omega_*(\Psi) + g_2(\Psi)u_*(\Psi) \\ a(\eta) + b(\eta)\Psi \end{bmatrix} + \\
&\frac{1}{4\gamma^2} Q_\Psi (g_1(\Psi) g_1(\Psi)^{\mathrm T} + \\
&2\gamma^2 \delta_{g_2}(\Psi) g_2(\Psi) g_2(\Psi)^{\mathrm T}) Q_\Psi^{\mathrm T} + c(\eta)^{\mathrm T} c(\eta)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

在 $(\Psi,\eta) = (0,0)$ 附近是负定的, 且其 Hessian 矩阵在 $(\Psi,\eta) = (0,0)$ 处非奇异。那么一簇控制器(7) 可解决非线性 H_∞ 可靠控制问题。

证明略。

4　结　语

可靠控制具有重要的现实意义。本文基于非线性 H_∞ 理论, 研究了具有严格冗余执行机构的非线性 H_∞ 状态反馈可靠控制器的参数化问题, 构造出一簇控制器, 使得当有一个执行机构失效时, 闭环系统仍渐近稳定且 L_2 增益有限。所得结果为非线性 H_∞ 状态反馈可靠控制的综合提供了更深的视角, 有利于实现控制系统的其它性能。本文的缺点是只允许有一个控制元件失效, 优点是不需知道失效域。事实上, 本文结果也可推广到有多个控制元件失效的情况[5], 但必须知道失效域。

(下转第 198 页)

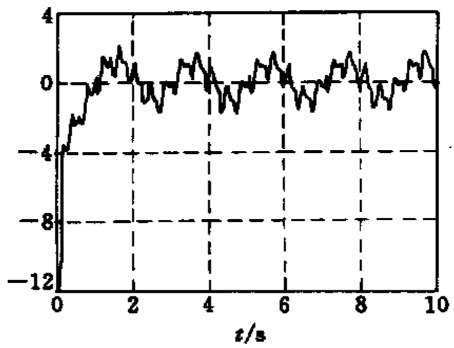

图 3 采用饱和函数的系统控制信号

$$u_{eq}(\boldsymbol{x},t) = -5x_1^2 - \frac{3}{5}x_2^{1/3}(t)$$
$$k(\boldsymbol{x},t) = 5x_1^2 + 2 + \eta$$

设计参数η选为0.01。为了克服抖振现象, 对上述控制策略进行平滑处理, 采用饱和函数取代开关函数。

计算机仿真结果如图 1～图 3 所示。图 1 为系统的相轨迹, 可见系统实现了终端滑模控制; 图 2 为系统的状态响应; 图 3 为控制信号, 可见抖振现象已消除。可以看出仿真结果与理论分析是吻合的。

6 结 论

本文提出一种全局非奇异终端滑模控制器, 可用于带有参数不确定和外部扰动的二阶非线性动态系统。采用新的终端滑模超曲面, 可得到全局非奇异的终端滑模控制。文中证明了系统状态从任意初始状态到达滑模面的时间和在滑模上到达平衡点的时间均为有限, 分析了 TSM 控制系统的稳态跟踪精度问题, 推导了系统状态的稳态跟踪精度和用以消除抖振的饱和函数宽度之间的数学关系。根据给定的系统状态稳态跟踪精度指标, 可设计出合适的饱和函数消除抖振, 并保证精度指标。

参考文献(References):

[1] Haimo V T. Finite time controllers[J]. SIAM J Control and Optimization, 1986, 24(4): 760-770.
[2] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of homogeneous systems[A]. Proc of the American Control Conf[C]. Albuquerque, 1997. 2513-2514.
[3] Man Z, Yu X H. Terminal sliding mode control of mimo linear systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems (Ⅰ): Fundamental Theory and Appl, 1997, 44(11): 1065-1070.
[4] Wu Y, Yu X, Man X. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems[J]. Systems and Control Letters, 1998, 34(5): 281-288.
[5] Yu T. Terminal sliding mode control for rigid robots[J]. Automatica, 1998, 34(1): 51-56.
[6] Slotine J J E, Li W P. Applied non-linear control[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Int, 1991. 276-309.

(上接第 193 页)

参考文献(References):

[1] Veillete R J, Medanic J V, Perkins W R. Design of reliable control systems[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1992, 37(3): 293-304.
[2] Veillete R J. Reliable linear-quadratic state-feedback control[J]. Automatica, 1985, 31(2): 137-143.
[3] Vidyasagar M, Viswanadham N. Reliable stabilization using a multicontroller configuration[J]. Automatica, 1985, 21(5): 599-602.
[4] Yang G H, Wang J, Soh C B. Reliable nonlinear control systems design using strictly redundant control elements[J]. Int J Contr, 1998, 69(2): 315-328.
[5] Yang G H, Lam J, Wang J L. Reliable H_∞ control for affine nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1998, 43(8): 1112-1117.
[6] Lu W M, Doyle J C. H_∞ control of nonlinear systems via output feedback: Controller parameterization[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1989, 34(8): 831-846.
[7] Yang C F, Wu J L, Lee T T. Parameterization of nonlinear H_∞ state-feedback controllers[J]. Automatica, 1997, 33(8): 1587-1590.
[8] Yung C F, Lin Y P, Yeh F B. A family of nonlinear H_∞ output feedback controllers[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1996, 41(2): 232-236.
[9] Van der Schaft A J. L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_∞ control[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1992, 37(6): 770-784.
[10] Isidori A, Astolfi A. Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1992, 37(9): 1283-1293.