

文章编号: 1001-0920(2002)02-0194-05

非奇异终端滑模控制系统的设计方法

冯 勇¹, 鲍 晟¹, 余星火²

(1. 哈尔滨工业大学 电气工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2 中昆士兰大学 信息与通讯学院, 澳大利亚)

摘 要: 提出一种全局非奇异终端滑模控制器, 可用于带有参数不确定和外部扰动的二阶非线性系统。证明了系统从任意初始状态到达滑模的时间和在滑模上到达平衡点的时间均为有限, 分析了终端滑模控制用于不确定性系统的跟踪精度, 推导了系统跟踪精度和用于消除抖振的饱和函数宽度之间的数学关系。根据给定的跟踪精度, 可设计出合适的饱和函数。仿真结果证明了所提出方法的有效性。

关键词: 变结构控制; 有限时间控制; 轨迹跟踪

中图分类号: TP 13 **文献标识码:** A

Design method of non-singular terminal sliding mode control systems

FEN G Yong¹, BAO Sheng¹, YU Xing-huo²

(1. Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2 Faculty of Informatics and Communication, Central Queensland University, Rockhampton 4702, Australia)

Abstract: A global non-singular terminal sliding mode controller is presented for second order nonlinear dynamic systems with parameter uncertainty and external disturbance. By using a new terminal sliding mode surface, a control law with global non-singularity is obtained. Both the time to reach the sliding mode surface from any initial system state and the time to reach the equilibrium point when in the sliding mode, are proved to be finite. The problem of precision in tracking is also explored in the case that terminal sliding mode control is applied to uncertain dynamic systems. A mathematical relationship between the width of the saturation function and the resultant precision in tracking is formulated. By specifying the precision of tracking that is required, an appropriate saturation function to eliminate chattering is designed. Simulation results are presented to validate the analysis.

Key words: variable structure control; finite time control; trajectory tracking

1 引 言

变结构系统(VSS)广泛应用于众多领域,如机器人、飞行器、交直流电机、电力系统、过程控制等。在变结构系统中,通过设计控制信号使系统状态保持在滑模或其邻域内,系统的动态性能由所选取的

滑模来确定。当处于滑动状态时,系统响应会变得对系统参数不确定和对外部扰动完全不敏感。但是,传统VSS的一个典型特点是系统状态在平衡点的收敛是渐近的,而不是在有限时间内。

近年来,终端滑模(TSM)控制器的研究引起了人们的重视^[1,2]。它具有一些良好的特性,如系统状

收稿日期: 2001-01-05; 修回日期: 2001-06-04

作者简介: 冯勇(1962—),男,江苏南京人,教授,博士生导师,从事变结构控制、鲁棒控制等研究;鲍晟(1975—),女,湖北十堰人,博士生,从事变结构控制、鲁棒控制的研究。

态能在有限时间内收敛, 相对于传统线性滑模控制器具有更高的稳态跟踪精度。但是, 现有的 TSM 控制器设计方法存在一个普遍的缺点, 即在 TSM 控制中存在奇异区域^[3,4]。目前的解决方案通常是采用间接的方法来避免奇异性。

本文提出一种全局非奇异终端滑模控制器, 可用于带有参数不确定和外部扰动的二阶非线性动态系统。通过设计新的 TSM 超曲面, 得到全局非奇异控制。可以证明, 从任意初始状态到达滑模面的时间和在滑模上到达平衡点的时间均为有限。另外, 由于采用与传统滑模控制相似的设计原理, 在 TSM 控制系统中仍然存在抖振。现有的消除抖振的方法是用饱和函数代替开关函数, 但是这样做会影响 TSM 系统的稳态跟踪精度。本文分析了用饱和函数代替开关函数的 TSM 系统的稳态跟踪精度问题, 并推导了跟踪精度和用来消除抖振的饱和函数宽度之间的数学关系。该方法可根据给定的跟踪精度设计饱和函数。仿真结果证明了所提出方法的有效性。

2 非线性系统的终端滑模控制

考虑如下带有不确定性的二阶非线性动态系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(x(t), t) + u(t) + d(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$, $|d(t)| \leq D(t)$ 为外部扰动, 未知函数 $f(x(t), t)$ 的估计值为 $\hat{f}(x(t), t)$, 满足

$$|\Delta f(x(t), t)| = |f(x(t), t) - \hat{f}(x(t), t)| \leq F(x(t), t)$$

式中 $F(x(t), t)$ 为已知函数。系统(1)的 TSM 超曲面 $s(t)$ 设计如下

$$s(t) = \dot{e}(t) + \beta e^{q/p}(t) \quad (2)$$

式中, $e(t) = x_1(t) - x_d(t)$ 为跟踪误差, $x_d(t)$ 为给定信号, $\beta > 0$ 为设计常数, p 和 q 为奇数, 且满足

$$p = 2m + 1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$p > q \quad (4)$$

令

$$e_1(t) = e(t) = x_1(t) - x_d(t) \quad (5)$$

$$e_2(t) = \dot{e}(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_d(t) \quad (6)$$

则式(2)的超曲面 $s(t)$ 可写成

$$s(t) = e_2(t) + \beta e_1^{q/p}(t) \quad (7)$$

TSM 存在的充分条件为

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2(t) < -\eta |s(t)| \quad (8)$$

式中 $\eta > 0$ 为常数。对于系统(1), 常用的控制形式为

$$u(t) = u_{eq}(x, t) - k(x, t) \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (9)$$

$$u_{eq}(x, t) = -\hat{f}(x, t) + \ddot{x}_d -$$

$$\beta \frac{q}{p} e_1^{(q-p)/p}(t) e_2(t) \quad (10)$$

$$k(x, t) = F(x, t) + D(t) + \eta \quad (11)$$

式中, $u_{eq}(x, t)$ 为等效控制, $k(x, t)$ 为非线性增益。将 $s(t)$ 微分, 由式(1)~(11)得出 $\dot{s}(t) = \dot{e}_2(t) - \eta |s(t)|$ 。因此, TSM 控制策略(9)可保证终端滑模的存在。

注意: 对系统(1)的 TSM 超曲面 $s(t)$, TSM 控制策略(9)中存在一些奇异区域。因为设计参数要求 $p > q$, 所以式(10)中 $(q-p)/p < 0$ 。因此在系统状态空间中 $e_1(t) = 0$ 区域内, TSM 控制(9)出现无穷大, 即发生了奇异现象, 这在系统设计中是不允许的。

3 非线性系统的非奇异终端滑模控制

为了克服上述传统 TSM 控制器的缺点, 本文提出一种改进的 TSM 方法。取如下 TSM 超曲面

$$s(t) = e(t) + \frac{1}{\beta} e^{p/q}(t) \quad (12)$$

式中 $1 < p/q < 2$ 。式(12)中超曲面 $s(t)$ 可写成

$$s(t) = e_1(t) + \frac{1}{\beta} e_2^{p/q}(t) \quad (13)$$

根据上述改进的 TSM 模型, 本文提出非线性系统的非奇异终端滑模控制的定理如下:

定理 1 对于系统(1)和 TSM 超曲面(13), 如果 TSM 控制设计为

$$u(t) = u_{eq}(x, t) - k(x, t) \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (14)$$

式中等效控制 $u_{eq}(x, t)$ 和非线性增益 $k(x, t)$ 分别为

$$u_{eq}(x, t) = -\hat{f}(x, t) + \ddot{x}_d - \beta \frac{q}{p} e_2^{2-q/p}(t) \quad (15)$$

$$k(x, t) = F(x, t) + D(t) + \eta \quad (16)$$

则系统状态可在有限时间内到达 TSM 超曲面。

证明 对 TSM 超曲面(13)求导, 有

$$\dot{s}(t) = \dot{e}_1(t) + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(t) \dot{e}_2(t) =$$

$$e_2(t) + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(t) (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_d(t)) =$$

$$e_2(t) + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(t) (f(x, t) +$$

$$u(t) + d(t) - \ddot{x}_d(t))$$

将式(14)代入上式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) = & \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(t) (\Delta f(x, t) + \\ & d(t) - k(x, t) \operatorname{sgn}(s(t)) \\ & - \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(t) \eta \operatorname{sgn}(s(t))) \end{aligned}$$

现在证明从任意 $e(0)$ 出发到达 TSM 的时间有限。为了简化证明过程, 假设 $s(0) > 0, e_2(0) \leq 0$ 。将 TSM 控制(14) 代入系统(1), 得

$$\begin{aligned} \dot{e}_2(t) = & -\beta \frac{q}{p} e_2^{2-p/q}(t) + \Delta f(x, t) + d(t) \\ & - (F(x, t) + D(t) + \eta) \operatorname{sgn} s = \\ & -\beta \frac{q}{p} e_2^{2-p/q}(t) + \Delta f(x, t) + \\ & d(t) - (F(x, t) + D(t) + \eta) \\ & - \beta \frac{q}{p} e_2^{2-p/q}(t) - \eta - \eta \end{aligned}$$

由于 $\dot{e}_2(t) = -\eta e_2(t)$ 单调递减, 因此状态轨迹将吸引到滑模平面 $s(t) = 0$ 。为计算状态到达滑模平面的最大时间, 定义一个关于 $e_2(t)$ 的区域

$$\Omega = \left\{ e_2(t) : s(t) > 0, e_2(t) = \left[-\frac{1}{2} \frac{p}{\beta q} \eta \right]^{q/(2q-p)} \right\}$$

在系统的状态 $e(t)$ 从初始值 $e(0)$ 到达 Ω 这一过程中, 系统的状态变量 $e_2(t)$ 始终满足如下不等式

$$\dot{e}_2(t) = -\beta \frac{q}{p} e_2^{2-p/q}(t) - \eta - \frac{1}{2} \eta$$

将上式从 $t = 0$ 到 $t = t_{r1}$ 积分, 可知系统状态将在有限时间内到达 Ω , 过程如下

$$\int_0^{t_{r1}} \dot{e}_2(t) dt = \int_0^{t_{r1}} \left[-\frac{1}{2} \eta \right] dt$$

则

$$e_2(t_{r1}) - e_2(0) = -\frac{1}{2} \eta t_{r1}$$

即

$$t_{r1} = 2(e_2(0) - e_2(t_{r1})) / \eta$$

式中

$$e_2(t_{r1}) = \left[-\frac{1}{2} \frac{p}{\beta q} \eta \right]^{q/(2q-p)}$$

t_{r1} 为系统状态到达 Ω 的时间。从 Ω 到 $s(t) = 0$, 有

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) = & \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(t) \eta \\ & - \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(t_{r1}) \eta = -\eta \end{aligned}$$

即

$$\dot{s}(t) = -\eta$$

式中

$$\eta = \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(t_{r1}) \eta$$

可知, 从 Ω 到 $s(t) = 0$ 的时间是有限的。

综上所述, 从初始状态 $e(0)$ 到 $s(0) = 0$ 的总时间为

$$t_r = t_{r1} + s(t_{r1}) / \eta$$

式中

$$\begin{aligned} s(t_{r1}) = & e_1(0) + e_2(0) t_{r1} - \\ & \frac{1}{4} \eta t_{r1}^2 + \frac{1}{\beta} e_2^{p/q}(t_{r1}) \end{aligned}$$

对于 $s(0) > 0, e_2(0) < 0$ 的情况, 与上述从 Ω 到 $s(t) = 0$ 相同, 系统状态到达 $s(t) = 0$ 的时间为

$$t_r = |s(0)| / \eta$$

式中

$$\eta = \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} e_2^{p/q-1}(0) \eta$$

至此, 在 $s(0) > 0$ 情况下, 对于 $e_2(0) \leq 0$ 或 $e_2(0) < 0$, 由初始状态到达滑模平面的时间均为有限已得到证明。对于 $s(0) < 0$ 的情况, 可得到类似结论。因此, 对初始状态不在滑模平面情况下, 即 $s(0) = 0$, 任意初始状态 $e(0)$ 到达 TSM 面的时间为

$$t_r = \begin{cases} \frac{2|e_2(0) - \operatorname{sgn}(s(t)) e_2(t_{r1})|}{\eta} + \frac{|s(t_{r1})|}{\eta} \\ e_2(0) \operatorname{sgn} s(0) = 0 \\ |s(0)| / \eta, e_2(0) \operatorname{sgn} s(0) < 0 \end{cases}$$

为证明在 TSM 超曲面上, 状态到达平衡点时间也为有限, 现从文献[5] 给出如下引理:

引理 1 假设连续、正定函数 $V(t)$ 满足微分不等式

$$\dot{V}(t) = -\alpha V^\eta(t), \quad t \geq 0 \quad (17)$$

式中 $\alpha > 0, 0 < \eta < 1$ 均为常数。则 $V(t)$ 满足不等式

$$V^{1-\eta}(t) = V^{1-\eta}(0) - \alpha(1-\eta)t \quad (18)$$

并且 $V(t) = 0, \forall t \geq t_{r0}$, 有限时间

$$t_{r0} = \frac{V^{1-\eta}(0)}{\alpha(1-\eta)} \quad (19)$$

在终端滑模 $s(t) = 0$ 上。由引理 1 可证明到达平衡点的时间有限。定义 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} e^2(t)$$

V 沿终端滑模对时间求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e(t) \dot{e}(t) = \\ & -e(t) \beta^{q/p} e^{q/p}(t) = -\alpha V^\eta \end{aligned}$$

式中

$$\alpha = 2^{(q/p+1)/2} \beta^{q/p} > 0$$

$$\eta = (q/p + 1)/2 < 1$$

由引理 1 知, 当 $t \rightarrow t_{r0}$ 时, $e(t) = 0$, 且

$$t_{r0} = \frac{V^{1-\eta}(0)}{\alpha(1-\eta)} = \frac{p}{\beta^{q/p}(p-q)} |e(0)|^{(1-q/p)}$$

4 非奇异 TSM 非线性系统的稳态分析

系统处于稳态时, 由于数值计算误差, 或控制中用连续的饱和函数代替开关函数, 在 TSM 超曲面上存在一边界面 S_φ 由文献[6]知, 在 S_φ 外部可以保证滑模的存在, 但在 S_φ 内部则无法保证。情况最坏时, 系统的跟踪轨迹只到达 S_φ 的边界, 这会对系统的稳态特性产生重大影响。为此, 本文提出关于非奇异 TSM 系统的稳态跟踪精度的定理。

定理 2 对于系统(1) 和 TSM 超曲面(13), 如果 TSM 控制策略(14) 中的开关函数用饱和宽度为 φ 的饱和函数代替, 则系统在 TSM 上的零阶和一阶稳态跟踪精度分别为

$$|e(t)| \leq \varphi \tag{20}$$

$$|\dot{e}(t)| \leq (2\beta\varphi)^{q/p} \tag{21}$$

证明 对 TSM 超曲面(12), 取 Lyapunov 函数 $V = |e(t)|$, 对时间求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e} \operatorname{sgn} e = \beta^{q/p} (s - e)^{q/p} \operatorname{sgn} e = \\ &= \beta^{q/p} (s \operatorname{sgn} e - |e|)^{q/p} - \beta^{q/p} (|e| - |s|)^{q/p} \end{aligned}$$

显然, 误差 $e(t)$ 收敛于边界层 $|s| \leq \varphi$ 因此有

$$|s(t)| \leq \varphi \Rightarrow |e(t)| \leq \varphi, \quad t$$

可得系统在 TSM 上的一阶稳态跟踪精度为

$$\begin{aligned} |\dot{e}(t)| &= |\beta s(t) - \beta e(t)|^{q/p} \\ &= (|\beta s(t)| + |\beta e(t)|)^{q/p} \leq (2\beta\varphi)^{q/p} \end{aligned}$$

即

$$|s(t)| \leq \varphi \Rightarrow |\dot{e}(t)| \leq (2\beta\varphi)^{q/p}, \quad t$$

根据定理 2, 由给定的系统跟踪精度, 便可设计出用于变结构系统的合适的饱和函数。

5 仿真实例

以上已提出全局非奇异的 TSM 控制系统设计方法, 证明了系统状态从任意初始值到达平衡点的时间是有限的, 并分析了不确定性动态系统在 TSM 时的稳态跟踪精度问题, 推导了系统状态的稳态跟踪精度和饱和函数宽度之间的数学关系。现用仿真实验来证明上面分析的有效性。

考虑如下二阶非线性系统

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \theta x_1^2(t) + d(t) + u(t)$$

式中, 未知参数 θ 的实际值为 $\theta = 4.36$, 假设只知其上限 $\theta_{max} = 10$ 和下限 $\theta_{min} = -10$, 以及估计值 $\hat{\theta} = 5$, 则有

$$|f(x_1(t), x_2(t)) - \hat{f}(x_1(t), x_2(t))| = |\theta x_1^2(t) - \hat{\theta} x_1^2(t)|$$

$$F(x_1(t), x_2(t)) = 5x_1^2(t)$$

外部干扰为

$$d(t) = \sin(\pi t) - 0.5\cos(5\pi t) + 0.5\sin(10\pi t)$$

$$|d(t)| \leq D = 2$$

系统初始值为 $x_2(0) = 0, x_1(0) = 1$ 。假设要求 TSM 上的零阶和一阶稳态跟踪精度分别为

$$|e(t)| \leq 0.05, \quad |\dot{e}(t)| \leq 0.25$$

根据式(20) 和(21), 可确定参数 $\beta = 1, q = 3, p = 5, \varphi = 0.05$ 。由式(13), 可得到 TSM 超曲面

$$s(t) = x_1(t) + x_2^{5/3}(t) = 0$$

由定理 1, 按式(14) 设计控制策略, 其中等效控制 $u_{eq}(x, t)$ 和非线性增益 $k(x, t)$ 分别为

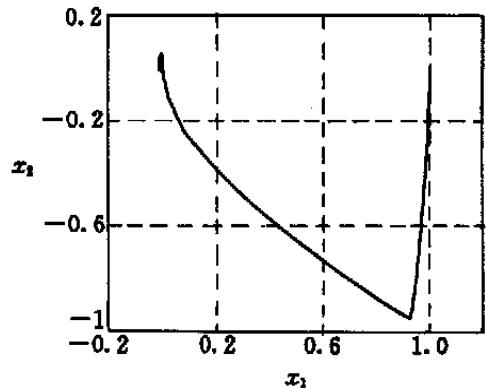


图 1 采用饱和函数的系统相图

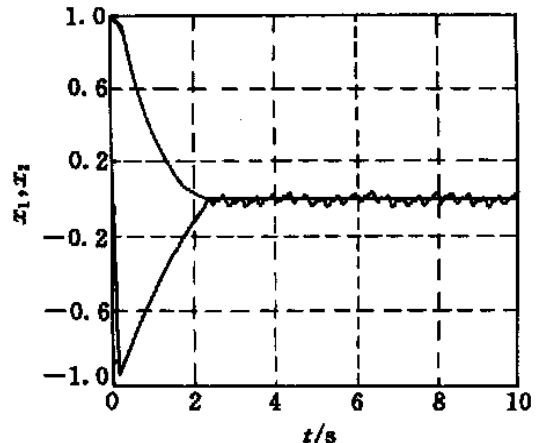


图 2 采用饱和函数的系统状态图

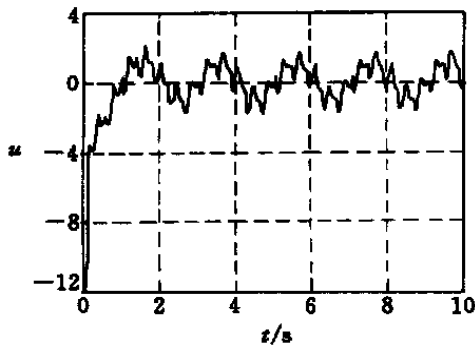


图3 采用饱和函数的系统控制信号

$$u_{eq}(x, t) = -5x_1^2 - \frac{3}{5}x_2^{1/3}(t)$$

$$k(x, t) = 5x_1^2 + 2 + \eta$$

设计参数 η 选为 0.01。为了克服抖振现象, 对上述控制策略进行平滑处理, 采用饱和函数取代开关函数。

计算机仿真结果如图 1~ 图 3 所示。图 1 为系统的相轨迹, 可见系统实现了终端滑模控制; 图 2 为系统的状态响应; 图 3 为控制信号, 可见抖振现象已消除。可以看出仿真结果与理论分析是吻合的。

6 结 论

本文提出一种全局非奇异终端滑模控制器, 可用于带有参数不确定和外部扰动的二阶非线性动态系统。采用新的终端滑模超曲面, 可得到全局非奇异

的终端滑模控制。文中证明了系统状态从任意初始状态到达滑模面的时间和在滑模上到达平衡点的时间均为有限, 分析了 TSM 控制系统的稳态跟踪精度问题, 推导了系统状态的稳态跟踪精度和用以消除抖振的饱和函数宽度之间的数学关系。根据给定的系统状态稳态跟踪精度指标, 可设计出合适的饱和函数消除抖振, 并保证精度指标。

参考文献(References):

- [1] Haimo V T. Finite time controllers[J]. SIAM J Control and Optimization, 1986, 24(4): 760-770
- [2] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of homogeneous systems[A]. Proc of the American Control Conf[C]. Albuquerque, 1997. 2513-2514
- [3] Man Z, Yu X H. Terminal sliding mode control of mimo linear systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems (I): Fundamental Theory and Appl, 1997, 44(11): 1065-1070
- [4] Wu Y, Yu X, Man X. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems[J]. Systems and Control Letters, 1998, 34(5): 281-288
- [5] Yu T. Terminal sliding mode control for rigid robots[J]. Automatica, 1998, 34(1): 51-56
- [6] Slotine J J E, Li W P. Applied non-linear control[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Int, 1991. 276-309

(上接第 193 页)

参考文献(References):

- [1] Veillette R J, Medanic J V, Perkins W R. Design of reliable control systems[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1992, 37(3): 293-304
- [2] Veillette R J. Reliable linear-quadratic state-feedback control[J]. Automatica, 1985, 31(2): 137-143
- [3] Vidyasagar M, Viswanadham N. Reliable stabilization using a multicontroller configuration[J]. Automatica, 1985, 21(5): 599-602
- [4] Yang G H, Wang J, Soh C B. Reliable nonlinear control systems design using strictly redundant control elements[J]. Int J Contr, 1998, 69(2): 315-328
- [5] Yang G H, Lam J, Wang J L. Reliable H_∞ control for affine nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1998, 43(8): 1112-1117
- [6] Lu W M, Doyle J C. H_∞ control of nonlinear systems via output feedback: Controller parameterization[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1989, 34(8): 831-846
- [7] Yang C F, Wu J L, Lee T T. Parameterization of nonlinear H_∞ state-feedback controllers[J]. Automatica, 1997, 33(8): 1587-1590
- [8] Yung C F, Lin Y P, Yeh F B. A family of nonlinear H_∞ output feedback controllers[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1996, 41(2): 232-236
- [9] Van der Schaft A J. L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_∞ control[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1992, 37(6): 770-784
- [10] Isidori A, Astolfi A. Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1992, 37(9): 1283-1293