第 17 卷 第 2 期
Vol. 17 No. 2
控 制 与 决 策
Control and Decision
2002 年 3 月
Mar. 2002

文章编号: 1001-0920(2002)02-0135-04

饱和输入下连续控制系统的相空间划分与平衡点的分类

郭树理, 黄 琳
(北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要: 首先对多饱和输入下控制系统的相空间进行划分, 通过方程的形式给出了 R^n 空间中饱和非线性的具体描述, 并分析了各区域间的位置关系; 然后对平衡点进行分类与比较, 所得结果丰富和发展了平衡点的划分; 最后研究了各类平衡点的等价判别准则。

关键词: 多饱和输入; 真实平衡点; 伪平衡点; 饱和序; 渐近稳定
中图分类号: O 317 文献标识码: A

The phase space and the equilibrium points of control system with saturated inputs

GUO Shu-li, HUANG Lin
(Department of Mechanics and Engineering Science, Beijing University, Beijing 100871, China)

Abstract: The phase space of control systems with saturated inputs is dealt with. Space structure of control systems with saturated inputs is presented, and the position relationship among intervals is analyzed. Based on the facts, different equilibrium points from the Lyapunov-type ones are defined. Finally, the basic method to all kinds of equilibrium points is presented.

Key words: saturated inputs; true equilibrium points; false equilibrium points; saturated order; asymptotically stability

1 引 言

有关线性系统在有界控制下达到零解全局渐近稳定性问题已有许多结论, 甚至将结论推广到非线性系统及时滞系统[1~9]。饱和现象是一种非常普遍的物理现象, 存在于大量的工程问题中, 例如在电力系统的励磁机及原动机中均存在大量的饱和现象。在以往的工程问题研究中, 已有一些关于界的作用的结果, 例如文献[1]用区间端点矩阵来判定饱和系统的稳定性。该文在处理开环系统不稳定时, 指出系统在达到饱和时存在平衡点问题, 但对平衡点未作讨论。

本文在上述文献的基础上, 对多饱和系统的空间结构进行探讨, 在这种结构下对平衡点的空间分布规律重新进行定义与分类, 初步论证了平衡点的一些基本特点, 并对平衡点分布规律给出了等价判别准则。本文的意义在于丰富和发展了平衡点的划分方法, 同时明确了饱和非线性系统的空间结构。

收稿日期: 2000-12-03; 修回日期: 2001-04-17
基金项目: 国家重点基础研究专项基金项目(G1998020302)
作者简介: 郭树理(1973—), 男, 内蒙古察右前旗人, 博士生, 从事复杂系统稳定性研究; 黄琳(1935—), 男, 江苏扬州人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统稳定性研究。

2 问题阐述

考虑文献[1～3]中连续控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = C^{\mathrm{T}}x(t) \\ u_s = \mathrm{sat}(-Kx) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $x \in R^n$ 是状态变量, $y \in R$ 是输出变量, $u_s \in R^1$ 是控制输入变量, A, B, C, K 是具有相应维数的常数矩阵, 且假设整个系统是最小实现的。

可控输入 u_s 表现为下列方式

$$\mathrm{sat}(-Kx) = \begin{cases} u_{\lim}, & -Kx \geq u_{\lim} \\ -Kx, & |Kx| < u_{\lim} \\ -u_{\lim}, & -Kx \leq -u_{\lim} \end{cases} \tag{2}$$

文献[1～3]对饱和函数项作如下处理

$$u_s = -\mu(x)Kx \tag{3}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & |-Kx| < u_{\lim} \\ \dfrac{u_{\lim}}{|Kx|}, & |-Kx| \geq u_{\lim} \end{cases} \tag{4}$$

文献[1,3]依据有关定理将系统(1)转化为

$$\dot{x}(t) = (A - \mu BK)x(t) \tag{5}$$

其中 $\mu = 0$ 和 $\mu = 1$ 对应区间矩阵 $A - \mu BK$ 的两个端点。

对于 MIMO 系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u = [u_{s,1} \quad u_{s,2} \quad \cdots \quad u_{s,m}] \\ u_{s,i} = \mathrm{sat}(-K_i x(t)), \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{6}$$

其中, $x \in R^n$ 是状态变量, $y \in R$ 是输出变量, $u_{s,i} \in R^1$ 是第 i 项控制输入变量, 且有 $|u_{s,i}| \leq u_{\lim,i}$, A, B, C, K 是具有相应维数的常数矩阵, 且假设整个系统是最小实现的。

文献[1～3]利用同样方法将 MIMO 系统(6)转化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BG_{\mu 0}K)x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{7}$$

其中 $G_{\mu 0}$ 表示主对角线上只取 1 或 0, 其余均为 0 的对角阵。

利用文献[1]对饱和非线性分析的变化规律, 可以得到一些特殊的点。

例 1 对于饱和系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_s \tag{8}$$

其中 $|u_s| < 5$, 状态反馈律 u_s 为

$$u_s = \begin{cases} 5, & -[0.1 \quad 0.3 \quad 1.2]x \geq 5 \\ -[0.1 \quad 0.3 \quad 1.2]x, & |u_s| < 5 \\ -5, & -[0.1 \quad 0.3 \quad 1.2]x \leq 5 \end{cases}$$

对于点 $x_{\mathrm{eq}1} = 0$, $x_{\mathrm{eq}2} = [100 \quad 100 \quad 50]^{\mathrm{T}}$, $x_{\mathrm{eq}3} = [-100 \quad -100 \quad -50]^{\mathrm{T}}$, 分别满足下述方程

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{\lim}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Bu_{\lim}$$

文献[1～3]对这些平衡点如何影响系统的稳定性未作解释。下面主要考虑这种现象。

3 饱和系统相空间的划分及平衡点的分类

按照饱和现象的物理意义及几何意义, 将 SISO 系统(1)转化为如下系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - \lambda BK)x(t) + \lambda^* Bu_{\lim} \\ y = Cx(t) \end{cases} \tag{9}$$

其中, λ 取为 0 或 1, λ^* 为 λ 的派生数, 其变化规律如下: 当 $\lambda = 0$ 时, λ^* 的取值为 1 或 -1; 当 $\lambda = 1$ 时, λ^* 的取值为 0。进一步, 若 $A - B\lambda K$ 可逆, 则容易得到

$$x_{\mathrm{eq}} = -\lambda^*(A - \lambda BK)^{-1}Bu_{\lim} \tag{10}$$

其限值规律为

$$\begin{cases} (\lambda, \lambda^*) = (0, 1) \leftrightarrow -Kx - u_{\lim} \geq 0 \\ (\lambda, \lambda^*) = (0, -1) \leftrightarrow -Kx + u_{\lim} \leq 0 \\ (\lambda, \lambda^*) = (1, 0) \leftrightarrow |-Kx| < u_{\lim} \end{cases} \tag{11}$$

它将全空间分成 3 部分, 分别记为 $D_{0,1}, D_{0,-1}, D_{1,0}$, 其意义为

$$D_{0,1} = \{x \mid -Kx \geq u_{\lim}\}$$

$$D_{0,-1} = \{x \mid -Kx \leq -u_{\lim}\}$$

$$D_{1,0} = \{x \mid |-Kx| < u_{\lim}\}$$

按照上述做法, 将 MIMO 系统(6)转化为下述系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - B\Lambda K)x(t) + B\Lambda^* u_{\lim} \\ y = Cx(t) \end{cases} \tag{12}$$

其中, Λ 表示主对角线为 1 或 0, 其余均为 0 的对角矩阵, Λ^* 为 Λ 的派生矩阵。(Λ, Λ^*) 在主对角线 (i, i) 上的变化规律如式(11)所示。对于 Λ, 有 2^m 种变化; 对于某个 Λ(其对角线有 l 个 0), Λ^* 有 $C_m^i \cdot 2^i$ 种可能的变化; 对于所有的 (Λ, Λ^*), 则有

$$C_m^0 + C_m^1 \cdot 2^1 + C_m^2 \cdot 2^2 + \cdots + C_m^m \cdot 2^m = 3^m \tag{13}$$

种可能性。即将全空间划分成 3^m 个区域。相应地, 对

于每个区域, 系统(6) 都有其具体的方程形式。从上述方程可以得到下列事实: 方程(6) 很容易转化成方程(12), 但方程(12) 并不代表方程(6); 若用式(11) 来解释方程(12), 则方程(6) 与方程(12) 是一致的。

为叙述方便, 现给出如下定义。

定义 1　对于系统(6) 或(12), 若 Λ 在主对角线第 $l_1, l_2, \cdots, l_p$ 项的元素为 0, 其余均为 1, $p \leq m$, 则称 Λ 具有饱和序 $l_1, l_2, \cdots, l_p$。

显然, 对于 Λ 具有饱和序 $l_1, l_2, \cdots, l_p$, 则 Λ^* 有 2^p 种可能性。特别是当 $\Lambda = I$ 时, 有 $\Lambda^* = 0$; 当 $\Lambda = 0$ 时, 有 $\Lambda^* = \mathrm{diag}(\pm 1, \cdots, \pm 1)$ 共 2^m 种可能性。即全部对角线元为 0 与 ± 1 的矩阵系为 Λ, 则有 $\Lambda \in \Lambda$, 且 Λ 与 Λ^* 非一一对应。

定义 2　对于系统(12), 由于(Λ, Λ^*) 将整个空间划分成 3^m 个区域, 记为 D_{Λ, Λ^*}, 其几何意义为

$$D_{\Lambda,\Lambda^*} = \left\{ x \left| \begin{array}{ll} \left| -K_i x \right| < u_{\mathrm{lim},i}, & i = l_1, l_2, \cdots, l_p \\ -K_j x \geq u_{\mathrm{lim},j}, & j = l_p + 1, \cdots, l_p + r \\ -K_z x \leq -u_{\mathrm{lim},z}, & z = l_{p+r+1}, \cdots, l_{p+r+k} \\ & p + r + k = m \end{array} \right. \right\}$$

定义 3　对于多饱和输入(6)(单饱和输入(1))系统, 若区域 $D_{\Lambda_1, \Lambda_1^*}$ 和 $D_{\Lambda_2, \Lambda_2^*}$ 有公共面(仅单输入二阶系统时为线), 且

$$\inf_{x_1 \in D_{\Lambda_1,\Lambda_1^*},\, x_2 \in D_{\Lambda_2,\Lambda_2^*}} d(x_1, x_2) = 0$$

其中 $d(\cdot, \cdot)$ 表示两点间的距离。则称它们是相邻的; 否则称为相间的。

显然, $D_{I,0}$ 和 $D_{0,I}$ 是相邻的。在例 1 中, $D_{I,0}$ 与 $D_{0,-I}$ 或 $D_{0,I}$ 是相邻的, $D_{0,-I}$ 与 $D_{0,I}$ 是相间的。

以下用$[\cdot, \cdot]$ 表示 Λ_1^* 和 Λ_2^* 在主对角线同一位置上的两个数。

基于上述定义及空间区域的划分规律, 可以得到如下定理:

定理 1　1) 除了 $\Lambda = I$ 外, Λ 派生的区域是相间的, 另外 $D_{I,0}$ 与其它任意区域均相交;

2) 对于两个不同的饱和序, 若它们只有一个位置不同, 其派生阵饱和对分别为$[0, 1]$, $[0, -1]$, $[1, 0]$, $[-1, 0]$ 之一时, 则其位置关系是相邻的; 若其派生阵至少有一饱和对为$[1, -1]$, $[-1, 1]$ 之一时, 则其位置关系是相间的;

3) m 个饱和输入(相互线性无关) 将全空间分成 3^m 个区域, 则任意两个区域的交集为空集。

下面考虑有关饱和系统平衡态的基本问题。对于系统(12), 若矩阵 $A - B\Lambda K$ 可逆, 则有

$$x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*} = -(A - B\Lambda K)^{-1} B \Lambda^* u_{\mathrm{lim}} \tag{14}$$

定义 4　1) 对于系统(12) 和(14), 若 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*} \in D_{\Lambda\Lambda^*}$, 则称 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*}$ 为系统(12) 的真实平衡点; 若矩阵$(A - B\Lambda K)$ 是稳定的(不稳定的), 则称 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*}$ 为系统(12) 的真实稳定(不稳定) 平衡点;

2) 对于系统(12) 和(14), 若 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*} \notin D_{\Lambda,\Lambda^*}$, 则称 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*}$ 为系统(12) 的伪平衡点; 若矩阵$(A - B\Lambda K)$ 是稳定的(不稳定的), 则称 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*}$ 为系统(12) 的伪稳定(不稳定) 平衡点。

定理 2　对于系统(12) 和(14), 若 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*} = -(A - B\Lambda K)^{-1} B\Lambda^* u_{\mathrm{lim}}$ 是稳定的(不稳定的) 真实平衡点, 则有 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,-\Lambda^*} = (A - B\Lambda K)^{-1} B\Lambda^* u_{\mathrm{lim}}$ 是稳定的(不稳定的) 真实平衡点; 特别是 $x = 0$ 一定是真实平衡点。同理, 若 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*} = -(A - B\Lambda K)^{-1} B\Lambda^* u_{\mathrm{lim}}$ 是稳定的(不稳定的) 伪平衡点, 则有 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,-\Lambda^*} = (A - B\Lambda K)^{-1} B\Lambda^* u_{\mathrm{lim}}$ 也是稳定的(不稳定的) 伪平衡点。

证明由定义 2 易得, 此略。

对于伪平衡点, 利用定义 4 及 Lyapunov 基本定理, 可得如下定理:

定理 3　对于饱和系统(6) 或(12), 假定 $A - B\Lambda K$ 可逆, 若 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*}$ 为稳定的伪平衡点, 则存在 $P^{\mathrm{T}} = P > 0$ 及 $x_0, x(t, t_i, x_0) \in D_{\Lambda,\Lambda^*}$, 使得

$$(x(t, t_i, x_0) - x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*})^{\mathrm{T}}((A - B\Lambda K)^{\mathrm{T}} P + P(A - B\Lambda K))(x(t, t_i, x_0) - x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*}) \tag{15}$$

为负。另外, 若 $x_0, x(t, t_i, x_0) \in D_{\Lambda\Lambda^*}$, 则有 $\Delta T_i < \infty$, 其中 $\Delta T_i = T_{i+1} - T_i$, $t \in [T_i, T_{i+1}]$。换言之, $x(t, t_i, x_0)$ 在有限时间内可以达到边界。

证明　若 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*}$ 为稳定的伪平衡点, 则根据伪平衡点的定义, 对区域 D_{Λ,Λ^*}, 必有 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*} \notin D_{\Lambda\Lambda^*}$。由于矩阵 $A - B\Lambda K$ 渐近稳定, 故存在 $P^{\mathrm{T}} = P > 0$ 及 $x_0, x(t, t_0, x_0) \in D_{\Lambda,\Lambda^*}$, 使得

$$(x(t, t_i, x_0) - x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*})^{\mathrm{T}}((A - B\Lambda K)^{\mathrm{T}} P + P(A - B\Lambda K))(x(t, t_i, x_0) - x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*})$$

为负。另外, $x(t, t_i, x_0)$ 必在有限时间内可以达到边界。若不然, 则至少存在一个 $x_0 \in D_{\Lambda,\Lambda^*}$, 使得 $x(t, t_0, x_0) \in D_{\Lambda,\Lambda^*}$, $t \geq t_0$。于是有

$$\lim_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) = -(A - B\Lambda K)^{-1} B\Lambda^* K$$

这与 $x_{\mathrm{eq},\Lambda\Lambda^*} \notin D_{\Lambda,\Lambda^*}$ 相矛盾, 所以有 $\Delta T_i < \infty$。□

从上述定理可以得到如下推论:

推论 1　若 $x_{\mathrm{eq},\Lambda\Lambda^*}$ 为系统(6) 的稳定真实平衡点, 则 $x_{\mathrm{eq},\Lambda,\Lambda^*}$ 是 D_{Λ,Λ^*} 对应方程的平衡点, 且其具有

吸引性;若 x_{eq,Λ,Λ^*} 是系统(6) 稳定伪平衡点,则一定存在 $\Lambda \neq \bar{\Lambda}$, 使得 $x_{eq,\Lambda,\Lambda^*} \in D_{\bar{\Lambda},\bar{\Lambda}^*}$, 但 x_{eq,Λ,Λ^*} 在 $D_{\bar{\Lambda},\bar{\Lambda}^*}$ 中一定非 $D_{\bar{\Lambda},\bar{\Lambda}^*}$ 对应方程的平衡点, 且其不具有吸引性。

对于 MIMO 饱和系统(6) 或(12), 且有式(14) 成立, 则存在下述等价判别准则:

等价判别准则　对于任意的平衡点 $x_{eq,\Lambda,\Lambda^*} = -(A - B\Lambda K)^{-1}B\Lambda^* u_{lim}$, 下列不等式

$$\begin{cases} \left| e_i K(A - B\Lambda K)^{-1}B(\Lambda_1 - \Lambda_2)u_{lim} \right| < u_{lim,i} \\ \qquad i = l_1, l_2, \cdots, l_p \\ e_j K(A - B\Lambda K)^{-1}B(\Lambda_1 - \Lambda_2)u_{lim} \geq u_{lim,j} \\ \qquad j = l_{p+1}, \cdots, l_{p+r} \\ e_z K(A - B\Lambda K)^{-1}B(\Lambda_1 - \Lambda_2)u_{lim} \leq -u_{lim,z} \\ \qquad z = l_{p+r+1}, \cdots, l_{p+r+k} \\ \qquad p + r + k = m \end{cases} \tag{16}$$

其中, $e_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 表示第 i 个元素为 1 的单位向量; $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ 为对角阵, Λ_1 表示主对角线第 $l_{p+1}, \cdots, l_{p+r}$ 为 1, 其余元素均为 0 的 $m \times m$ 矩阵; Λ_2 表示主对角线第 $l_{p+r+1}, \cdots, l_{p+r+k}$ 为 1, 其余元素均为 0 的 $m \times m$ 矩阵; $\Lambda + \Lambda_1 + \Lambda_2 = I_{m\times m}$。若式(16) 均成立, 则平衡点为真实平衡点; 反之亦然。当式(16) 中的不等式至少有一个关于 i, j, z 不成立时, 则平衡点为伪平衡点; 反之亦然。

证明　根据系统(12) 及(14) 的关系, 有

$$-K_i x_{eq,\Lambda,\Lambda^*} = e_i K(A - B\Lambda K)^{-1}B\Lambda^* u_{lim} \tag{17}$$

由于 Λ 的饱和序为 $l_1, l_2, \cdots, l_p$, 其派生阵 Λ^* 是第 $l_{p+1}, \cdots, l_{p+r}$ 为 1, 第 $l_{p+r+1}, \cdots, l_{p+r+k}$ 为 -1, 其余元素均为 0 的 $m \times m$ 矩阵, 故有 $\Lambda^* = \Lambda_1 - \Lambda_2$。根据定义 2 关于 D_{Λ,Λ^*} 的定义, 若 $x_{eq,\Lambda,\Lambda^*} \in D_{\Lambda,\Lambda^*}$, 则必有

$$\left| -K_i x_{eq,\Lambda,\Lambda^*} \right| < u_{lim,i} \tag{18}$$

成立。同理, 可证明其它两个不等式; 反之, 若 x_{eq,Λ,Λ^*} 满足式(16), 则其必满足定义 2, 即 $x_{eq,\Lambda,\Lambda^*} \in D_{eq,\Lambda,\Lambda^*}$。若 $x_{eq,\Lambda,\Lambda^*} \notin D_{\Lambda,\Lambda^*}$, 则至少存在一个 i, j, z, 使得式(16) 至少一个不等式不成立, 即必有定义 2 不成立, 亦即 $x_{eq,\Lambda,\Lambda} \notin D_{\Lambda,\Lambda^*}$。而这是不可能的。□

4 结　　语

本文通过对非线性饱和系统的研究, 明确了饱和系统的空间结构, 同时尝试用“0, 1”语言来描述其动力结构, 并在这种动力结构下对平衡点进行分类。本文丰富和发展了平衡点的划分方法, 同时明确了饱和非线性系统的空间特殊结构形式。与其它非线性动力系统相比, 饱和非线性系统具有如下本质特点: 由于伪平衡点的存在性, 使饱和系统不同于一般的非线性系统多平衡态问题; 由于非零真实平衡点的存在性, 使饱和系统不同于一般滑模系统或多模态系统的运动规律。

参考文献(References):

[1] Lee W A, Hedrick J K. Some new results on closed-loop stability in the present of control saturation[J]. Int J Control, 1995, 62(3): 619-631.

[2] Dugard L, Verrist E I. Stability and control of time-delay systems[M]. Berlin: Springer, 1998. 303-317.

[3] Henrion D, Tarbouriech S. LMI relaxations for robust stability of linear systems with saturating controls[J]. Automatica, 1999, 35(9): 1599-1604.

[4] 黄琳. 稳定性理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.

[5] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 1984.

[6] Horisberger H P, Belanger P R. Regulator for linear time invariant plants with uncertain parameters[J]. IEEE Trans AC, 1976, 42(5): 705-708.

[7] Itkis U. Control systems of variable structure[M]. Jerusalem: Israel University Press, 1976. 38-87.

[8] Michel A N, Dorong Lin, Kaining Wang. Stability analysis of a class of systems with parameter uncertainties and with state saturation nonlinearities[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1995, 15(2): 505-519.

[9] Scibile L, Kouvaritakis B I F. Stability region for a class of open-loop unstable linear systems: Theory and application[J]. Automatica, 2000, 36(1): 37-44.