第 17 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 2002 年 3 月
Vol. 17 No. 2 Control and Decision Mar. 2002

文章编号: 1001-0920(2002) 02-0223-03

非线性系统的直接自适应调节律的性质分析

汪国强[1], 张铁柱[2], 宋仁学[3], 韩志刚[4]
(1. 黑龙江大学 电子工程学院,黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 哈尔滨理工大学 系统工程研究所,黑龙江 哈尔滨 150080; 3. 东北农业大学 数学教研室, 黑龙江 哈尔滨 150030; 4. 黑龙江大学 应用数学研究所,黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 对直接自适应调节律的性质进行分析。在一定的条件下,证明了该调节律具有最省"能量"性质,并证明在直接自适应调节律的作用下,系统的输出将收敛到希望的输出值,而且相应的控制变量序列也是收敛的。

关键词: 非线性系统; 动态线性化; 自适应调节律; 收敛性
中图分类号: TP 13 文献标识码: A

Properties analysis of direct adaptive regulator for nonlinear systems

WANG Guo-qiang[1], *ZHANG Tie-zhu*[2], *SONG Ren-xue*[3], *HAN Zhi-gang*[4]
(1. College of Electronics Engineering, Heilongjiang University, Harbin 150080, China; 2. Institute of Systems Engineering, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China; 3. Department of Mathematics, Northeast Agricultural University, Harbin 150030, China; 4. Institute of Application Mathematics, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: Properties of the direct adaptive regulator are analyzed. It has been proved that the regulator has the property of minimum energy under some conditions. The output of the system can converge to an expected value of output and the sequence of control vector is also convergence under the action of the direct adaptive regulator.

Key words: nonlinear system; dynamical linearization; adaptive regulator; convergence

1 引 言

文献[1] 考虑了离散时间非线性系统的自适应调节律的设计问题, 给出了该调节律的动态线性化设计途径。具体说, 文献[1] 考虑了系统 S, 假定它的时滞为 1, 可由下述模型描述

$$y(k) = f[Y_{k-1}^{k-p}, u(k-1), U_{k-2}^{k-m}, \theta(k), k] \quad (1)$$

其中, $y(k)$ 是一维输出, $u(k)$ 是 n 维输入, k 是离散时间, $\theta(k)$ 是模型参数(可能是未知的), $f[\cdot]$ 是非线性函数, 而

$$Y_{k-1}^{k-p} = [y(k-1), y(k-2), \cdots, y(k-p)]$$

$$U_{k-2}^{k-m} = [u(k-2), u(k-3), \cdots, u(k-m)]$$

关于自适应调节律设计的动态线性化途径, 由下述算法组成:

1) 伪梯度向量 $\varphi(k)$ 满足方程

收稿日期: 2000-11-20; 修回日期: 2001-03-12

作者简介: 汪国强(1963—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 博士生, 从事智能辨识与控制、自适应控制的研究; 韩志刚(1934—), 男, 河北乐亭人, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统辨识、多层递阶方法及无模型控制等研究。

$$y(k)-y(k-1)=$$
$$\varphi(k)^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)] \quad (2)$$

2) 调节律算法为

$$u(k-1)=$$
$$u(k-2)+\frac{\lambda_k}{\|\varphi(k)\|^2}\varphi(k)[y_0-y(k-1)] \quad (3)$$

其中,y_0 是系统 S 的输出希望值,λ_k 是控制参数。

文献[2～4] 也得到类似于式(3) 的控制律,即

$$u(k)=$$
$$u(k-1)+\frac{\lambda_k}{\|\nabla_{u(k-1)}f[u(k-1),k]\|^2}\times$$
$$\nabla_{u(k-1)}f[u(k-1),k]\times$$
$$\{y_0-f[Y_{k-1}^{k-p},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},\hat{\theta}(k),k]\} \quad (4)$$

其中

$$\nabla_{u(k-1)}f[u(k-1),k]=$$
$$\frac{\partial}{\partial u}f[Y_{k-1}^{k-p},u,U_{k-2}^{k-m},\hat{\theta}(k),k]\Big|_{u=u(k-1)}$$

但不同的是,$\varphi(k)$ 是 $f[\bullet,u,\bullet,\bullet,k]$ 关于 u 的梯度,差式 $y_0-y(k)$ 由 $y_0-f[Y_{k-1}^{k-p},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},\hat{\theta}(k),k]$ 代替,$\hat{\theta}(k)$ 是 $\theta(k)$ 的估值。文献[2～4] 得出的控制律称为递推梯度控制律,控制律(3) 可看成递推梯度控制律的一种改进实用形式。而文献[5] 提出的关于动态系统的无模型控制律算法与式(3) 完全相同,所以对具有形如式(3) 的控制律的性质进行分析具有重要意义。

2 直接自适应调节律的最省"能量"性质

我们称控制变量 $u(k)$ 在两个相邻时刻的差值 $u(k-1)-u(k-2)$ 为控制律的变差。显然

$$E[u(k-1),u(k-2)]\triangleq$$
$$\|u(k-1)-u(k-2)\|^2$$

与控制量的变化所需的"能量"有关。$E[u(k),u(k-1)]$ 愈大,消耗的能量愈大。所以,如果某种控制律能使 $E[u(k),u(k-1)]$ 在某集合内取最小值,则在能量消耗最小的意义下该控制律是最佳的。现证明如下关于控制律(3) 的最省"能量"性质:

定理1 如果 $y_0(k),y(k-1),u(k-2),\varphi(k)$ 皆已知,取 $\lambda_k=1$,则控制律(3) 所确定的控制量 $u(k)$ 满足

$$y_0(k)-y(k-1)=$$
$$\varphi(k)^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)]$$
$$\|u(k-1)-u(k-2)\|^2=$$
$$\min_u\|u-u(k-2)\|^2$$

证明 引入如下 Lagrange 函数

$$f(u,\lambda)=$$
$$\|u-u(k-2)\|^2+\lambda\{y_0(k)-$$
$$y(k-1)-\varphi(k)^{\tau}[u-u(k-2)]\}$$

根据极值条件,令 $\partial f/\partial u$ 及 $\partial f/\partial\lambda$ 为零,可得

$$u=u(k-2)+\frac{1}{\|\varphi(k)\|^2}\varphi(k)\times$$
$$[y_0(k)-y(k-1)]$$

其中 u 是函数 $\|u-u(k-2)\|^2$ 满足条件

$$y_0(k)-y(k-1)=\varphi(k)^{\tau}[u-u(k-2)]$$

的极值点。由于 $\|u-u(k-2)\|^2$ 仅有极小值点,故定理 1 成立。□

3 直接自适应调节律收敛性分析的基本假设

在实际应用中,调节律(3) 中的 $\varphi(k)$ 由其最优估计 $\hat{\varphi}(k)$ 代替。因此式(3) 可写成

$$u(k-1)=$$
$$u(k-2)+\frac{\lambda_k}{\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\hat{\varphi}(k)[y_0-y(k-1)] \quad (5)$$

由于调节律(3) 中的 $\varphi(k)$ 由方程

$$y(k)-y(k-1)=$$
$$\varphi(k)^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)] \quad (6)$$

确定,其中 $y(k)$ 是真实系统响应,相应于控制量 $u(k-1)$ 的输出。于是,由式(5) 和(6) 有

$$y(k)=y(k-1)+\varphi(k)^{\tau}\frac{\lambda_k}{\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\times$$
$$\hat{\varphi}(k)[y_0-y(k-1)]=$$
$$y(k-1)+\lambda_k\Delta_k[y_0-y(k-1)] \quad (7)$$

其中 $$\Delta_k=\frac{\varphi(k)^{\tau}\hat{\varphi}(k)}{\|\hat{\varphi}(k)\|^2}$$

一般地,如果 $y(k+h)$ 是系统在控制量 $u(k+h-1)$ 作用下的真实输出值,则有

$$y(k+h)=$$
$$y(k+h-1)+\varphi(k+$$
$$h)^{\tau}\frac{\lambda_{k+h}}{\|\hat{\varphi}(k+h)\|^2}\hat{\varphi}(k+$$
$$h)[y_0-y(k+h-1)]=$$
$$y(k+h-1)+\lambda_{k+h}\Delta_{k+h}[y_0-$$
$$y(k+h-1)] \quad (8)$$

由式(8) 得

$$y_0-y(k+h)=$$

$$(1-\lambda_{k+h}\Delta_{k+h})(y_0-y(k+h-1)) \quad (9)$$

逐次应用式(9),得

$$y_0-y(k+h)=$$
$$(1-\lambda_{k+h}\Delta_{k+h})(1-\lambda_{k+h-1}\Delta_{k+h-1})\cdots$$
$$(1-\lambda_{k+1}\Delta_{k+1})(y_0-y(k))=$$
$$\left[\prod_{i=1}^{h}(1-\lambda_{k+i}\Delta_{k+i})\right][y_0-y(k)] \quad (10)$$

由此可见$\lim\limits_{h\to\infty}y(k+h)=y_0$的充分必要条件是

$$\lim_{h\to\infty}\prod_{i=1}^{h}(1-\lambda_{k+i}\Delta_{k+i})=0 \quad (11)$$

条件(11)是分析调节律(3)收敛性的重要工具。注意到式(7), λ_k 的选择具有一定的任意性, 我们希望 λ_k 的值尽可能不随时间 k 改变。设

$$\varphi(k)=(\varphi_1(k),\varphi_2(k),\cdots,\varphi_n(k))^\tau$$
$$\hat{\varphi}(k)=(\hat{\varphi}_1(k),\hat{\varphi}_2(k),\cdots,\hat{\varphi}_n(k))^\tau$$

此处n是调节变量$u(k)$的维数。相应的$u(k)$可表示成 $u(k)=(u_1(k),u_2(k),\cdots,u_n(k))^\tau$, 于是调节律(3)可写成

$$u_i(k)=$$
$$u_i(k-1)+\frac{\lambda_k}{\|\varphi(k)\|^2}\varphi_i(k)\{y_0-y(k)\}$$
$$i=1,2,\cdots,n$$

为分析调节律(3)的收敛性, 现给出如下基本假设:

假设 1　存在$0<\alpha_i<\beta_i$,使得对一切k, $0<\alpha_i\le\varphi_j(k),\hat{\varphi}_i(k)\le\beta_{isj}$, $j=1,2,\cdots,n$;

假设 2　存在 $0<\alpha<\beta_i$,使得对一切k, $-\beta_i\le\varphi_i(k),\hat{\varphi}_i(k)\le-\alpha_i<0$, $i=1,2,\cdots,n$;

假设 3　存在$\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$,使得对一切 k, $0<\alpha_i\le\varphi_{i_j}(k),\hat{\varphi}_{i_j}(k)\le\beta_{i_j}$, $j=1,2,\cdots,m$。

而对其余的$i\ne i_j$, $j=1,2,\cdots,m$, 对一切k, $-\beta_i\le\varphi_i(k),\hat{\varphi}_i(k)\le-\alpha_i<0$。进一步设$\alpha_i=\alpha$, $\beta_i=\beta$, $i=1,2,\cdots,n$。

上述3条基本假设是有工程意义的,因为控制量$u(k)$的确定依赖于$\varphi(k)$和$\hat{\varphi}(k)$,而$\varphi(k)$和$\hat{\varphi}(k)$作为伪梯度, 在工程上是有界的,且可正可负。因此,若3条基本假设中有一条成立, 则可使所设计的调节器与工程实际不产生矛盾。

4　调节律的收敛性

定理 2　如果3条基本假设中有一条成立,则必然存在一个常数λ,使当$\lambda_k=\lambda$时,系统的调节律(3)的控制变量$u(k+h-1)$相应的输出变量$y(k+h)$满足$\lim\limits_{h\to\infty}y(k+h)=y_0$。

证明　无论3条基本假设中哪一条基本假设成立,皆有$n\alpha^2\le\varphi(k)^\tau\hat{\varphi}(k)\le n\beta^2$, $n\alpha^2\le\|\hat{\varphi}(k)\|^2\le n\beta^2$,从而对一切$k$有

$$0<\frac{\alpha^2}{\beta^2}\le\Delta_k=\frac{\varphi(k)^\tau\hat{\varphi}(k)}{\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\le\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

只要取$\lambda_k=\lambda=\alpha^2/\beta^2$,则对一切$k$有 $0<\alpha^4/\beta^4\le\lambda_k\Delta_k\le1$。于是,由式(10)得$|y_0-y(k+h)|\le(1-\alpha^4/\beta^4)^h|y_0-y(k)|$。由于$0<\alpha^4/\beta^4\le1$,所以有

$$\lim_{h\to\infty}|y_0-y(k+h)|\le$$
$$\lim_{h\to\infty}(1-\alpha^4/\beta^4)^h|y_0-y(k)|=0 \qquad \square$$

推论 1　在定理2的条件下,对于调节律(3)有:

1) ∃常数$C>0$,使$\|u(k+h)-u(k+h-1)\|\le C(1-\alpha^4/\beta^4)^h$, $h=1,2,\cdots$;

2) $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\|u(k+h)-u(k+h-1)\|<+\infty$;

3) 存在u_0使$\lim\limits_{h\to\infty}u(k+h)=u_0$。

证明　关于1),由于

$$u(k+h)=$$
$$u(k+h-1)+\frac{\lambda_{k+h+1}}{\|\varphi(k+h+1)\|^2}\times$$
$$\varphi(k+h+1)[y_0-y(k+h)]$$

所以
$$\|u(k+h)-u(k+h-1)\|=$$
$$\frac{|\lambda_{k+h+1}|}{\|\varphi(k+h+1)\|}|y_0-y(k+h)|$$

由定理2的证明可以看出,$|y_0-y(k+h)|\le(1-\alpha^4/\beta^4)^h|y_0-y(k)|$,故有

$$\|u(k+h)-u(k+h-1)\|\le$$
$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{1}{\alpha\sqrt{n}}|y_0-y(k)|\left(1-\frac{\alpha^4}{\beta^4}\right)^h=$$
$$C(1-\alpha^4/\beta^4)^h$$

其中
$$C=\frac{\alpha}{\beta^2\sqrt{n}}|y_0-y(k)|$$

关于2),只需应用1)中结果,则有

$$\sum_{h=1}^{\infty}\|u(k+h)-u(k+h-1)\|\le$$
$$C\sum_{h=1}^{\infty}(1-\alpha^4/\beta^4)^h=$$
$$C\frac{1-\alpha^4/\beta^4}{\alpha^4/\beta^4}=C(\beta^4/\alpha^4-1)<+\infty$$

(下转第229页)

$$F_2 = \text{Block-diag}\underbrace{(GS, \cdots, GS)}_{m}$$

$$\Delta \boldsymbol{U}(k) = [\Delta \boldsymbol{u}_{1,M}(k) \quad \cdots \quad \Delta \boldsymbol{u}_{m,M}(k)]^{\mathrm{T}}$$

$$\omega(k) = [\omega_1(k) \quad \cdots \quad \omega_n(k)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}(k) = [\boldsymbol{x}_1(k) \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_m(k)]^{\mathrm{T}}$$

D_0 和 D_1 的定义同前。

不失一般性, 令参考输入为 $\omega(k) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$, 则整个分布式系统的状态空间模型可表示为

$$\boldsymbol{X}(k+1) = F_1 \boldsymbol{X}(k) + BL\Delta \boldsymbol{U}(k) = [F_1 - BL(I - D_0)^{-1} D_1 F_2] \boldsymbol{X}(k) \tag{15}$$

其中

$$F_1 = \text{Block-diag}\underbrace{(S, \cdots, S)}_{m}$$

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mm} \end{bmatrix}$$

式(15) 表明了采用分布式求解后, 系统 k 时刻状态与 $k+1$ 时刻状态的映射关系, 只要

$$\lambda(F_1 - BL(I - D_0)^{-1} D_1 F_2) < 1 \tag{16}$$

即状态映射的全部特征值均小于1, 则整个分布式系统渐近稳定。

注 **1**　第3节对分布式算法偏差的分析是局部的, 因为它只关心当前时刻分布式求解所引起的变化; 而本节的稳定性分析则是全局的, 可用以判断分布式预测控制算法在整个时域的稳定性。

5　结　　论

本文讨论了分布式预测控制算法的性能, 分析了单步时域上分布式求解与集中求解两种情况下的性能偏差; 在算法收敛的情况下, 进一步讨论了分布式预测控制系统的名义稳定性, 得到了保证名义稳定性的充分条件。在对每个智能体系统进行设计时, 通过参数调整离线确定保证算法收敛和系统稳定的参数, 这样可以很好地保证算法在线实施的性能, 同时大大降低了在线优化的计算量和规模。

参考文献(References):

[1] Alex Zheng. Nonlinear model predictive control of the tennessee eastman process[A]. Proc of the American Control Conf[C]. Philadelphia, 1998. 1700-1704.

[2] 杜晓宁, 席裕庚, 李少远. 分布式预测控制算法[A]. 2000年中国自动化学会青年会议论文集—— 自动化理论、技术与应用[C]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000. 7: 68-72.

[3] Yugeng Xi. New design method for discrete-time multivariable predictive controllers[J]. Int J Control, 1989, 49(1): 45-56.

[4] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.

(上接第 225 页)

关于 3), 只需注意对任意 m 和 n, $m < n$, 则有

$$\| u(k+n) - u(k+m) \| = \| u(k+n) - u(k+n-1) + u(k+n-1) - u(k+n-2) + \cdots + u(k+m+1) - u(k+m) \| \leq \sum_{h=m}^{n-1} \| u(k+h+1) - u(k+h) \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

所以, $\{u(k+h)\}_{h=1}^{\infty}$ 是一个 Cauchy 序列, 故必有 u_0 使 $\lim_{h \to \infty} u(k+h) = u_0$。□

参考文献(References):

[1] Han Zhigang, Qin Bin, Tong Jiaqiang. Direct adaptive control for nonlinear systems[J]. Analysis Modelling Simulation, 1997, 28(1): 301-315.

[2] 韩志刚. 非线性自适应控制系统设计的一种方法[J]. 控制与决策(Control and Decision), 1990, 15(6): 39-45.

[3] 韩志刚. 同参数估计对偶的自适应控制算法[J]. 控制理论与应用(Control Theory and Application), 1992, 9(4): 374-379.

[4] 韩志刚. 自适应控制系统设计的参数辨识途径[J]. 自动化学报(Acta Automatica Sinica), 1992, 18(6): 712-715.

[5] 韩志刚, 王德进. 无模型控制器[J]. 黑龙江大学学报(J of Natural Science of Heilongjiang University), 1994, 11(4): 29-35.