文章编号: 1001-0920(2002)02-0226-04

分布式预测控制算法的性能分析

杜晓宁, 席裕庚, 李少远
(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘　要: 分布式求解策略是为了降低大规模预测控制系统在线实施的计算量和计算复杂性而提出的一种有效算法。在算法收敛的条件下, 分析了分布式求解和集中求解两种方法在单步时域上的性能偏差, 给出了标称情况下分布式预测控制系统名义稳定的充分条件, 为更好地理解所提出的分布式预测控制算法和算法的实施提供了理论依据。

关键词: 预测控制; 分布式系统; 纳什最优
中图分类号: TP 273　　**文献标识码**: A

Performance analysis of distributed model predictive control algorithm

DU Xiao-ning, XI Yu-geng, LI Shao-yuan
(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Distributed optimization algorithm is an efficient control strategy to reduce the on-line computational complexity of model predictive control for large-scale systems. The performance deviation on single-step horizon between distributed and centralized optimization is analyzed under the condition that the algorithm is convergent. The nominal stability of this distributed system is discussed. It can help to understand the proposed distributed optimization algorithm and provide the theoretical basis for the system design.

Key words: model predictive control; distributed system; Nash optimality

1 引　　言

预测控制是一种有效的控制策略, 已被工业界广泛采用。预测控制要求在滚动时域的每一步在线求解一个优化问题, 其计算规模与控制时域和操作变量的维数均有关[1]。对于高维大规模系统, 其在线求解的计算量往往很大, 如果采用集中式的整体求解, 则对计算机的性能和处理速度等要求很高。文献[2]提出的分布式预测控制算法是求解复杂大规模系统的一种有效策略, 该算法基于纳什优化的思想, 将大规模的在线优化问题转化为各智能体小规模的分布式优化求解, 从而减小了计算负担, 提高了算法的实用性。

本文进一步从性能上对文献[2]中的算法进行分析和评价, 讨论在单步时域上分布式求解与集中求解二者的性能偏差, 并给出了标称情况下分布式预测控制系统保证名义稳定性的充分条件。这些性

收稿日期: 2000-11-28; **修回日期**: 2001-03-12
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(69934020, 60074004)
作者简介: 杜晓宁(1973—), 女, 陕西西安人, 博士生, 从事预测控制、满意决策与控制的研究; 席裕庚(1946—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、复杂系统控制理论等研究。

能分析为更好地理解和实施所提出的分布式预测控制策略提供了理论基础。

2　分布式预测控制算法描述[2]

分布式预测控制算法的主要思想, 是将一个大规模的在线优化问题转化为各智能体小规模的分布式优化, 同时各智能体之间通过网络进行通信和信息共享, 以提高系统的控制性能。在 k 时刻, 每个智能体均在假定已知其它智能体最优解的前提下优化各自的子目标, 并将此次求出的最优解与上次的结果进行比较; 然后通过网络相互通信, 通报此次的最优解和比较结果, 直至两次求出的结果均在给定的误差精度内。则 k 时刻整个系统达到平衡, 平衡点即为该分布式系统在 k 时刻的纳什最优解, 优化过程结束, 各智能体实施该时刻的即时控制律, 并将时域滚动到下一时刻, 重复上述优化过程。其算法可描述如下:

Step 1: 在 k 时刻, 各个智能体给出控制量的预估初值, 并将其通知其它智能体; 令 $l = 0$(l 为迭代次数), 则

$$\Delta \overline{u}_{i,M}^{l}(k) = [\Delta \overline{u}_i^{l}(k), \Delta \overline{u}_i^{l}(k+1), \cdots, \Delta \overline{u}_i^{l}(k+M-1)]^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

Step 2: 在假定已知其它智能体最优解的前提下, 各个智能体优化各自的子目标, 即

$$\left.\frac{\partial J_i}{\partial \Delta u_{i,M}(k)}\right|_{\Delta u_{j,M}^{*}(k),\, j=1,\cdots,m,\, j\neq i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

并计算出各自的最优解 $\Delta u_{i,M}^{l+1}(k)$, $i = 1, 2, \cdots, m$;

Step 3: 检查所有智能体的预估迭代收敛条件是否满足, 即对给定的精度 $\epsilon_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 判断是否有 $\| \Delta u_i^{l+1}(k) - \Delta \overline{u}_i^{l}(k) \| \leq \epsilon_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$; 如果所有智能体的迭代收敛条件均成立, 则令 $\Delta u_{i,M}^{*}(k) = \Delta u_{i,M}^{l+1}(k)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 迭代计算结束, 转 Step 4; 否则令 $\Delta \overline{u}_{i,M}^{l}(k) = \Delta u_{i,M}^{l+1}(k)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $l = l + 1$, 返回 Step 2;

Step 4: 各智能体计算其相应的即时控制律 $\Delta u_i(k) = [I \ \cdots \ 0]\Delta u_{i,M}^{*}(k)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 并将其作用于各智能体;

Step 5: 滚动移位到下一时刻, 即 $k + 1 \rightarrow k$, 返回 Step 1, 重复上述过程。

关于该分布式算法的详细描述参见文献[2], 这里不再赘述。本文重点从性能上对文献[2] 提出的分布式算法进行分析和评价, 这样能清楚地理解所提出的分布式预测控制算法, 并为算法的实施提供理论依据。以下讨论均假设分布式算法是收敛的。

3　单步时域性能偏差分析

尽管分布式系统可通过网络最大限度地交换和获取信息, 但由于采用了分布式求解策略, 所得出的是纳什最优解, 与集中求解时所得到的一般意义上的最优解相比存在一定的偏差。假设系统的性能指标为

$$J = \| \omega(k) - \tilde{y}_{PM}(k) \|_Q^2 + \| \Delta u_M(k) \|_R^2 \tag{1}$$

式(1) 对于 m 个智能体子系统是可分的。其中

$$Q = \text{Block-diag}(Q_1, \cdots, Q_m) = Q^{\mathrm{T}} > 0$$
$$R = \text{Block-diag}(R_1, \cdots, R_m) = R^{\mathrm{T}} > 0$$

$\omega(k)$ 为由 k 时刻各个智能体的期望输出组成的列向量, $\tilde{y}_{PM}(k)$ 为系统在 k 时刻的预测输出, 可表示为

$$\tilde{y}_{PM}(k) = \tilde{y}_{P0}(k) + A \Delta u_M(k) \tag{2}$$

其中
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

$\tilde{y}_{P0}(k)$ 为 k 时刻各个智能体初始预测输出组成的列向量。在集中求解方式下, 整个系统的最优解为[4]

$$\Delta u_M^{c}(k) = (A^{\mathrm{T}}QA + R)^{-1}A^{\mathrm{T}}Q[\omega(k) - \tilde{y}_{P0}(k)] \tag{3}$$

假设预测时域与控制时域相等, 由式(3) 得

$$\omega(k) - \tilde{y}_{P0}(k) = [A + (A^{\mathrm{T}}Q)^{-1}R]\Delta u_M^{c}(k) \tag{4}$$

将其代入性能指标(1), 则 k 时刻集中求解时的性能指标可表示为

$$J^{c}(k) = \| \omega(k) - \tilde{y}_{P0}(k) - A\Delta u_M^{c}(k) \|_Q^2 + \| \Delta u_M^{c}(k) \|_R^2 = \| \Delta u_M^{c}(k) \|_S^2 \tag{5}$$

其中
$$S = R(A^{\mathrm{T}}QA)^{-1}R + R$$

在分布式预测控制算法收敛条件满足的情况下, k 时刻整个分布式系统的纳什最优解可写成[2]

$$\Delta u_M^{d}(k) = (I - D_0)^{-1}D_1[\omega(k) - \tilde{y}_{P0}(k)] \tag{6}$$

其中

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & -D_{11}A_{12} & \cdots & -D_{11}A_{1m} \\ -D_{22}A_{21} & 0 & \cdots & -D_{22}A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -D_{mm}A_{m1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} D_{11} & & & \\ & D_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{mm} \end{bmatrix}$$

$$D_{ii} = (A_{ii}^{\mathrm{T}} Q_i A_{ii} + R_i)^{-1} A_{ii}^{\mathrm{T}} Q_i$$

令 $A_0 = \text{Block-diag}(A_{11}, \cdots, A_{mm})$, 则有

$$\begin{cases} D_0 = D_1(A_0 - A) \\ D_1 = (A_0^{\mathrm{T}} Q A_0 + R)^{-1} A_0^{\mathrm{T}} Q \end{cases} \tag{7a}$$

$$\omega(k) - \tilde{y}_{P0}(k) = [A + (A_0^{\mathrm{T}} Q)^{-1} R] \Delta u_M^d(k) \tag{7b}$$

假设 k 时刻两种情况下的初始条件相同, 则由式(7b) 和(4) 知

$$\Delta u_M^d(k) = [A + (A_0^{\mathrm{T}} Q)^{-1} R]^{-1} [A + (A^{\mathrm{T}} Q)^{-1} R] \Delta u_M^c(k) = H^d \Delta u_M^c(k) \tag{8}$$

将其代入式(1), 得到 k 时刻分布式系统的性能指标为

$$\begin{aligned} J^d(k) &= \| \omega(k) - \tilde{y}_{P0}(k) - A \Delta u_M^d(k) \|_Q^2 + \| \Delta u_M^d(k) \|_R^2 = \\ &\| \omega(k) - \tilde{y}_{P0}(k) - A \Delta u_M^c(k) + A \Delta u_M^c(k) - A H^d u_M^c(k) \|_Q^2 + \| \Delta u_M^c(k) - \Delta u_M^c(k) + H^d \Delta u_M^c(k) \|_R^2 = \\ &J^c(k) + \| \Delta u_M^c(k) \|_E^2 \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $E = (I - H^d)^{\mathrm{T}} [A^{\mathrm{T}} Q A + R] (I - H^d)$

可以看出, E 为 Hermit 矩阵。令 $t_E(E)$ 为 E 的范数, 则有

$$\| \Delta u_M^c(k) \|_E^2 \leq (\Delta u_M^c(k))^{\mathrm{T}} \| E \| \Delta u_M^c(k) = t_E(E) \| \Delta u_M^c(k) \|^2$$

由 $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0, R = R^{\mathrm{T}} > 0$ 知, 式(5) 中的 S 为正定矩阵, 故有

$$\| \Delta u_M^c(k) \|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m(S)} \| \Delta u_M^c(k) \|_S^2 = \frac{1}{\lambda_m(S)} J^c(k)$$

其中 $\lambda_m(S) > 0$ 为 S 的最小特征值。进一步有

$$\eta = \frac{J^d(k)}{J^c(k)} \leq \left(1 + \frac{t_E(E)}{\lambda_m(S)}\right) = 1 + \Delta = \eta_m \tag{10}$$

这里, η 为 k 时刻系统在分布式求解和集中式求解下两者性能指标的相对值, η_m 为其上限, Δ 为分布式求解和集中式求解性能偏差的相对上限值。

4 分布式预测控制系统名义稳定性分析

为便于分析整个系统采用分布式求解后的名义稳定性, 我们将各个子系统的预测模型写成状态空间的形式[3]。在 k 时刻第 i 个子系统的预测状态空间模型为

$$\mathrm{x}_i(k+1) = S\mathrm{x}_i(k) + \mathrm{a}_{ii} \Delta u_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^{m} \mathrm{a}_{ij} \Delta u_j(k), \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{11a}$$

$$\tilde{\mathrm{y}}_i(k) = GS\mathrm{x}_i(k) + A_{ii} \Delta \mathrm{u}_{i,M}(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^{m} A_{ij} \Delta \mathrm{u}_{j,M}(k), \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{11b}$$

其中

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N \times N)}, \quad \mathrm{a}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij}(1) \\ a_{ij}(2) \\ \vdots \\ a_{ij}(N) \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij}(1) & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{ij}(M) & \cdots & a_{ij}(1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ij}(P) & \cdots & a_{ij}(P - M + 1) \end{bmatrix}_{(P \times M)}$$

$$\Delta u_i(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \Delta \mathrm{u}_{i,M}(k)$$

$$\Delta \mathrm{u}_{i,M}(k) = [\Delta u_i(k) \quad \cdots \quad \Delta u_i(k + M - 1)]^{\mathrm{T}}$$

N 为建模时域, $G = [\mathrm{I}_{P \times P} \quad \mathbf{0}_{P \times (N-P)}]$ 表示从 N 维向量中取前 P 个运算。

$$\mathrm{x}_i(k) = [x_{i1}(k) \quad \cdots \quad x_{iN}(k)]^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\mathrm{y}}_i(k) = [y_i(k+1) \quad \cdots \quad y_i(k+P)]^{\mathrm{T}}$$

子系统 i 的性能指标为

$$J_i = \| \omega_i(k) - \tilde{\mathrm{y}}_i(k) \|_{Q_i}^2 + \| \Delta \mathrm{u}_{i,M}(k) \|_{R_i}^2, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{12}$$

其中 $\omega_i(k) = [\omega(k+1) \quad \cdots \quad \omega(k+P)]^{\mathrm{T}}, i = 1, 2, \cdots, m$。根据分布式求解算法, 在 k 时刻子系统 i 的纳什最优解为

$$\Delta \mathrm{u}_{i,M}(k) = D_{ii} \left[\omega_i(k) - GS\mathrm{x}_i(k) - \sum_{j=1, j \neq i}^{m} A_{ij} \Delta \mathrm{u}_{j,M}(k) \right] \tag{13}$$

在收敛性条件满足的情况下, 整个分布式系统在 k 时刻的纳什最优解可写成

$$\Delta \mathrm{U}(k) = (I - D_0)^{-1} D_1 [\omega(k) - F_2 \mathrm{X}(k)] \tag{14}$$

它具有状态反馈的形式。系统的即时控制律为 $\Delta \mathrm{u}(k) = L \Delta \mathrm{U}(k)$, 这里

$$\Delta \mathrm{u}(k) = [\Delta u_1(k) \quad \cdots \quad \Delta u_m(k)]^{\mathrm{T}}$$

$$L = \text{Block-diag} \underbrace{(L_0 \quad \cdots \quad L_0)}_{m}$$

$$L_0 = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)_{1 \times M}$$

$$F_2 = \text{Block-diag}\underbrace{(GS, \cdots, GS)}_{m}$$

$$\Delta U(k) = [\Delta u_{1,M}(k) \quad \cdots \quad \Delta u_{m,M}(k)]^T$$

$$\omega(k) = [\omega_1(k) \quad \cdots \quad \omega_m(k)]^T$$

$$X(k) = [x_1(k) \quad \cdots \quad x_m(k)]^T$$

D_0 和 D_1 的定义同前。

不失一般性, 令参考输入为 $\omega_i(k) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则整个分布式系统的状态空间模型可表示为

$$X(k+1) = F_1 X(k) + BL\Delta U(k) = [F_1 - BL(I - D_0)^{-1} D_1 F_2] X(k) \qquad (15)$$

其中

$$F_1 = \text{Block-diag}\underbrace{(S, \cdots, S)}_{m}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

式(15) 表明了采用分布式求解后, 系统 k 时刻状态与 $k+1$ 时刻状态的映射关系, 只要

$$\lambda(F_1 - BL(I - D_0)^{-1} D_1 F_2) < 1 \qquad (16)$$

即状态映射的全部特征值均小于1, 则整个分布式系统渐近稳定。

注 1　第 3 节对分布式算法偏差的分析是局部的, 因为它只关心当前时刻分布式求解所引起的变化; 而本节的稳定性分析则是全局的, 可用以判断分布式预测控制算法在整个时域的稳定性。

5　结　　论

本文讨论了分布式预测控制算法的性能, 分析了单步时域上分布式求解与集中求解两种情况下的性能偏差; 在算法收敛的情况下, 进一步讨论了分布式预测控制系统的名义稳定性, 得到了保证名义稳定性的充分条件。在对每个智能体系统进行设计时, 通过参数调整离线确定保证算法收敛和系统稳定的参数, 这样可以很好地保证算法在线实施的性能, 同时大大降低了在线优化的计算量和规模。

参考文献(References):

[1] Alex Zheng. Nonlinear model predictive control of the tennessee eastman process[A]. Proc of the American Control Conf[C]. Philadelphia, 1998. 1700-1704.

[2] 杜晓宁, 席裕庚, 李少远. 分布式预测控制算法[A]. 2000 年中国自动化学会青年会议论文集——自动化理论、技术与应用[C]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000. 7: 68-72.

[3] Yugeng Xi. New design method for discrete-time multi-variable predictive controllers[J]. Int J Control, 1989, 49(1): 45-56.

[4] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.

(上接第 225 页)

关于 3), 只需注意对任意 m 和 $n, m < n$, 则有

$$\|u(k+n) - u(k+m)\| = \|u(k+n) - u(k+n-1) + u(k+n-1) - u(k+n-2) + \cdots + u(k+m+1) - u(k+m)\| \le \sum_{h=m}^{n-1} \|u(k+h+1) - u(k+h)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

所以, $\{u(k+h)\}_{h=1}^{\infty}$ 是一个 Cauchy 序列, 故必有 u_0 使 $\lim_{h\to\infty} u(k+h) = u_0$。□

参考文献(References):

[1] Han Zhigang, Qin Bin, Tong Jiaqiang. Direct adaptive control for nonlinear systems[J]. Analysis Modelling Simulation, 1997, 28(1): 301-315.

[2] 韩志刚. 非线性自适应控制系统设计的一种方法[J]. 控制与决策(Control and Decision), 1990, 15(6): 39-45.

[3] 韩志刚. 同参数估计对偶的自适应控制算法[J]. 控制理论与应用(Control Theory and Application), 1992, 9(4): 374-379.

[4] 韩志刚. 自适应控制系统设计的参数辨识途径[J]. 自动化学报(Acta Automatica Sinica), 1992, 18(6): 712-715.

[5] 韩志刚, 王德进. 无模型控制器[J]. 黑龙江大学学报(J of Natural Science of Heilongjiang University), 1994, 11(4): 29-35.