

文章编号: 1001-0920(2002)02-0239-04

Volterra 泛函级数在非线性系统辨识中的应用

欧 文, 韩崇昭, 王文正

(西安交通大学 电子与信息工程学院, 陕西 西安 710049)

摘 要: 利用 Volterra 泛函级数描述非线性系统, 将非线性系统辨识问题转化为标准的最小二乘问题, 并通过 QR 分解进行求解. 在对输入矩阵 P 进行 Householder 变换过程中, 提出利用输入向量对输出向量的影响因子进行 P 阵的列选择, 同时完成模型辨识, 有效地克服了 Volterra 泛函级数辨识中维数灾难问题. 数字仿真表明了该方法的有效性.

关键词: Volterra 泛函级数; 维数灾难; 正交分解; Householder 变换

中图分类号: TP 273 **文献标识码:** A

Application of Volterra series in the identification of nonlinear systems

OU Wen, HAN Chong-zhao, WANG Wen-zheng

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: By applying the Volterra series to describe the nonlinear system, the identification problem of nonlinear system is transformed into a normal least mean squares problem, which can be solved by QR decomposition. In the process of decomposing the input matrix by the Householder transformation by using of an effect factor between the input vector and the output vector, the selection of row vectors in the input matrix is processed, as well as the structure identification of system is presented, which overcomes the dimension disaster in the identification of Volterra series. The algorithm is validated by the simulation results.

Key words: Volterra series; dimension disaster; orthogonal decomposition; Householder transform

1 引 言

在现实世界中, 我们遇到的绝大多数系统都是非线性系统. 由于线性系统模型不可能捕获与非线性系统紧密相关的有限周期内丰富的动态特性, 例如分叉等, 所以研究非线性系统辨识方法及过程显得非常重要. Volterra 泛函级数于 1880 年正式提出, 但是直到 20 世纪 70 年代才开始受到人们的普遍重视^[1], 并广泛应用于非线性通道补偿器的实现,

通信中回音的消除, 船在海浪中的非线性现象建模, 以及其它一些需用非线性解决的问题.

Volterra 泛函级数之所以具有如此大的吸引力, 根本原因在于它能以任意精度逼近紧集上的连续函数, 能描述一大类的非线性现象, 并且 Volterra 泛函级数核 (特别是频域核) 具有鲜明的物理意义. 因此在非线性系统的辨识中, 选用 Volterra 泛函级数作为非线性系统的模型集, 无疑是正确而可行的.

收稿日期: 2000-12-11; 修回日期: 2001-04-05

作者简介: 欧文 (1968—), 女, 湖南沅陵人, 讲师, 博士生, 从事智能控制技术、非线性系统辨识等研究; 韩崇昭 (1943—), 男, 陕西乾县人, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、非线性系统辨识等研究.

但由于Volterra泛函级数的长度随着模型的记忆长度和阶次的增加呈指数增加,导致了Volterra泛函级数辨识的维数灾难问题。目前,Volterra泛函级数辨识方法大都围绕这一问题展开研究,或利用特定的输入信号^[2,3],或利用核的对称性^[4],在一定程度上减少其计算量。Koh和Powers^[5]则采用只考虑二阶核矩阵的对角元素,并将二阶核分解为两个一阶核的乘积的简化形式,用于估计二阶Volterra泛函级数核。该方法直接简化Volterra泛函级数,是一种减少计算量的有效途径。本文利用正交分解进行Volterra泛函级数的选项及估计,旨在直接简化Volterra泛函级数。

2 基于Volterra泛函级数的非线性系统辨识

对于离散时间系统,其I/O关系可表示为如下形式的Volterra泛函级数

$$y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(n) \quad (1)$$

$$y_k(n) = \dots \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} h_k(i_1, \dots, i_k) \times x(n-i_1) \dots x(n-i_k) \quad (2)$$

式中, $x(n)$ 是输入信号; $y_k(n)$ 是第 k 阶级数对输出的贡献, 它们都是实数序列; $h_k(i_1, \dots, i_k)$ 是 k 阶Volterra时域核, 为待辨识的项, 它是非线性系统的 k 阶离散脉冲响应函数。

从式(1)和式(2)可以看出, 随着记忆长度和模型阶次的增加, 待辨识的Volterra核呈指数增加, 这就是Volterra泛函级数辨识的维数灾难问题。好在大多数真实系统都可用有限记忆长度和有限阶次的Volterra泛函级数近似描述。在不考虑直流增益的情况下, k 阶脉冲响应函数是对称的, 于是可得3阶截断Volterra泛函级数的形式为

$$y(n) = \sum_{i=0}^{L-1} h_1(i)x(n-i) + \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=i}^{L-1-L} I(i,j)h_2(i,j)x(n-i)x(n-j) + \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=i}^{L-1-L} \sum_{k=j}^{L-1-L} J(i,j,k)h_3(i,j,k) \times x(n-i)x(n-j)x(n-k) + e_n \quad (3)$$

式中, L 为记忆长度, e_n 为截断误差, 而

$$I(i,j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 2, & i \neq j \end{cases}$$

$$J(i,j,k) = \begin{cases} 1, & i=j=k \\ 3, & \text{others} \\ 6, & i \neq j, j \neq k, i \neq k \end{cases}$$

定义系统的输入矩阵

$$P = [X(n), X(n+1), \dots, X(n+M-1)]^T \quad (4)$$

式中, M 是样本长度(数据点数), 而

$$X(n) = [x(n), \dots, x(n-L+1), x^2(n), 2x(n)x(n-1), \dots, x^2(n-L+1), x^3(n), 3x^2(n)x(n-1), \dots, x^3(n-L+1)] \quad (5)$$

定义系统的输出向量

$$Y = [y(n), y(n+1), \dots, y(n+M-1)]^T \quad (6)$$

定义系统的多阶脉冲响应向量为 Θ , 它是与 $X(n)$ 相对应的顺序排列的Volterra核, 即

$$\Theta = [h_1(0), \dots, h_1(L-1), h_2(0,0), h_2(0,1), \dots, h_2(L-1, L-1), h_3(0,0,0), h_3(0,0,1), \dots, h_3(0,0, L-1), \dots, h_3(L-1, L-1, L-1)] \quad (7)$$

则有

$$Y = P\Theta + e \quad (8)$$

已知非线性系统的输入序列和输出序列, 利用式(8)求解多阶脉冲响应向量, 是一个标准的最小二乘问题。由式(7)看出, 即使对于记忆长度 $L=20$, 模型阶次 $N=3$ 的Volterra泛函级数, 其核的数量仍为1770项。显然, 其中只有少数项是对系统输出贡献较大的项。因此可选择这些项作为对系统的近似, 而忽略对系统输出贡献很小的项, 直接简化Volterra泛函级数核, 以达到减少计算量的目的。

3 Volterra泛函级数核的选项及估计

3.1 基于QR分解的参数估计问题

考虑形如式(8)的最小二乘问题, 未知参数向量 Θ 可通过最小化下列指标

$$\min_{\Theta} \|P\Theta - Y\|_2^2 \quad (9)$$

得到。对矩阵 P 进行QR分解, 有

$$Q^T P = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中, Q 是正交矩阵, R 是上三角矩阵。由于 L_2 范数可由正交变换保持不变, 所以式(9)等价于

$$\min_{\Theta} \|Q^T P\Theta - Q^T Y\|_2^2 \quad (10)$$

即

$$\min_{\Theta} \|R\Theta - \bar{Y}\|_2^2 + \|\tilde{Y}\|_2^2 \quad (11)$$

求解 $R\Theta = \bar{Y}$, 可得 Θ^* 。 Θ^* 由前向回归计算得到。记

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Theta = [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n], \quad \bar{Y} = [y_1 y_2 \dots y_n]$$

则

$$\begin{cases} \theta_i = y_n / r_{nn} \\ \theta = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n r_{ik} \theta_k}{r_{ii}}, \quad i = n-1, \dots, 1 \end{cases} \quad (12)$$

3.2 利用 Householder 变换进行 Volterra 泛函级数核的选项及估计

利用 Householder 变换可实现任意 $m \times n$ 矩阵 P 的 QR 分解。用 K_L 标记截断 Volterra 泛函级数核的长度, 则数据点数为 M 的输入矩阵 P 为 $M \times K_L$ 维。对扩展矩阵 \tilde{P} 进行 Householder 变换, 扩展矩阵由输入矩阵和输出向量构成, 其初值为

$$\tilde{P}^{(0)} = [P: Y] = [p_1^{(0)} p_2^{(0)} \dots p_{K_L}^{(0)} Y^{(0)}]$$

在第 k 步 Householder 变换中, 保持 $\tilde{P}^{(k-1)}$ 中前 $(k-1)$ 列不变, 将第 k 列 $p_k^{(k-1)}$ 主对角线以下的元素均变为 0, 据此构造 Householder 向量, 完成对 $\tilde{P}^{(k-1)}$ 的变换, 得到 $\tilde{P}^{(k)}$ (公式^[6]略)。经过 M 步变换, 得到

$$\tilde{P}^{(M)} = \begin{bmatrix} R & \bar{Y} \\ 0 & \tilde{Y} \end{bmatrix}$$

于是由式(12)得到 Volterra 泛函级数核 Θ^* , 估计残差由 \tilde{Y}, \tilde{Y} 给出。

如前所述, 并不需要进行 M 步 Householder 变换, 然后估计出 K_L 个 Volterra 核, 只需选出有效的核, 并对它们进行估计。为此, 在 Householder 变换过程中引入一个影响因子, 据此控制选项及选项过程的停止。

3.3 选项控制及停止控制条件

在第 k 步 Householder 变换中, $\tilde{P}^{(k-1)}$ 的前 $(k-1)$ 列不变 (即已选出 $k-1$ 个核), 在剩余的列中选择对输出影响最大的一列作为第 k 列。令

$$a_j^{(k)} = \sum_{i=k}^N (\tilde{p}_{ij}^{(k-1)})^2$$

$$b_j^{(k)} = \sum_{i=k}^N \tilde{p}_{ij}^{(k-1)} y_i^{(k-1)}$$

定义影响因子为

$$\text{eff}_j^{(k)} = b_j^{(k)2} / a_j^{(k)} \quad (13)$$

记第 k 步中最大的影响因子为

$$\text{eff}^{(k)} = \max_{j=k, \dots, K_L} (\text{eff}_j^{(k)}) \quad (14)$$

使 $\text{eff}_j^{(k)}$ 最大化的 j 即为所选的列号。这意味着在剩余的列中, 该列输入量对输出的影响最大。由式(5)和(7)看出, Volterra 泛函级数核的排列与输入矩阵向量的排列是一致的, 选择对输出贡献较大的输入矩阵中的一列, 就是选择了相应的 Volterra 泛函级数有效核。依此类推, 直到第 M_s 步的 $\text{eff}^{(M_s)}$ 足够小, 则停止选项, M_s 即为 Volterra 级数有效核的长度。至此便完成了非线性系统的模型辨识, 前向回归计算 Θ^* , 可得待辨识的 Volterra 泛函级数核, 从而完成非线性系统的参数辨识。

但是, 如果单纯以 $\text{eff}^{(k)} \in (\epsilon$ 为 正数) 作为选项停止的控制条件, 往往由于 ϵ 选择不当, 使得要么选项过早结束 (漏项), 要么选入多余的项 (可能由噪声引起), 导致辨识精度的降低。为此, 本文提出以相邻两项的影响因子比值 ($\text{eff}^{(k)} / \text{eff}^{(k-1)}$) 作为选项停止控制条件。当影响因子比值足够小时, 说明当前选项与已选出的项相比, 对系统输出的贡献很小, 可以忽略, 选项应停止。本文取选项停止控制条件为

$$\text{eff}^{(k)} / \text{eff}^{(k-1)} \in \epsilon, \quad \epsilon = 0.001 \quad (15)$$

即后一待选项的影响因子不大于前一项的 10^{-3} , 效果良好。

4 仿真研究

取如下 3 阶非线性模型作为仿真对象

$$y(n) = -2.06x(n) + 2.7x(n-1) + x(n-2) + 0.94x(n)x(n-3) - 1.58x^2(n-1) - 2.8x(n-1)x(n-2) - 5.6x^2(n-2) - 2.5x^3(n)$$

输入信号取 $[-1, 1]$ 上均匀分布的随机信号, 观测噪声取幅值为输入信号 1/10 的随机信号, 数据

表 1 与仿真模型相对应的时域核

核序号	真 值	辨识结果
1	- 2.06	- 2.060 9
2	2.7	2.700 3
3	1.0	0.999 7
24	0.47	0.469 7
41	- 1.58	- 1.578 6
42	- 1.4	- 1.399 4
60	- 5.6	- 5.600 8
231	- 2.5	- 2.497 7

点数取 512, Volterra 泛函级数的阶数为 3, 记忆长度为 20。

本文方法成功地辨识出与仿真模型结构及参数相一致的模型, 辨识结果详见表 1 和表 2。

表 2 辨识中影响因子的变化

k	$\text{eff}^{(k)}$	$\text{eff}^{(k)}/\text{eff}^{(k-1)}$
1	4 008 1 e+ 3	
2	1. 882 0 e+ 3	0. 469 6
3	1. 069 0 e+ 3	0. 568 0
4	387. 638 3	0. 362 6
5	149. 446 5	0. 385 5
6	137. 024 9	0. 916 9
7	73. 257 9	0. 534 6
8	45. 286 2	0. 618 2
9	3. 954 1 e- 4	8. 731 4 e- 6

将时域核按阶分别做傅氏变换, 可得系统各阶的幅频特性。一阶频域核幅频特性的最大估计误差为 0. 001 5; 二阶频域核估计的幅频特性及估计误差如图 1 和图 2 所示, 最大误差为 0. 002 2。

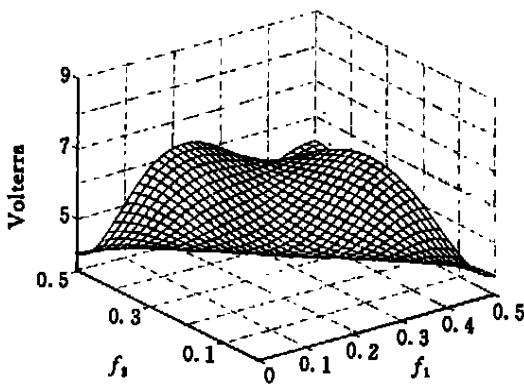


图 1 二阶频域核估计的幅频特性

5 结 论

本文在 Householder 正交变换中引入影响因

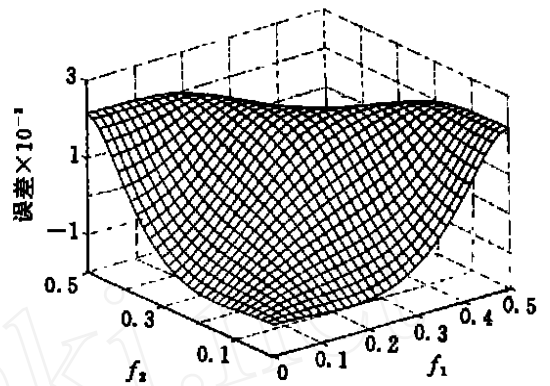


图 2 二阶频域核幅频特性的估计误差

子, 对 Volterra 泛函级数进行核的选项及估计。该方法能合理地简化 Volterra 泛函级数, 大大减少了 Volterra 泛函级数辨识中的计算量, 从而有效地利用 Volterra 泛函级数进行非线性系统辨识。

参考文献 (References):

- [1] 王文正, 唐晓泉, 欧文, 等. Volterra 泛函级数辨识方法的综述及一种简化方法[J]. 非线性动力学学报 (J of Nonlinear Dynamics in Science and Technology), 1999, 6(1): 30-36
- [2] Boyd S, Tang Y S, Chua L O. Measuring Volterra kernels[J]. IEEE Trans on Circ Syst, 1983, 30 (8): 571-577.
- [3] Chua L O, Liao Y. Measuring Volterra kernels (II) [J]. Int J of Circ Theory, 1989, 17(2): 151-190
- [4] Nam S W, Powers E J. Application of higher order spectral analysis to cubically nonlinear system identification[J]. IEEE Trans on Sig Proc, 1994, 42(7): 1746-1765
- [5] Koh T, Powers E J. Second order Volterra filtering and its application to nonlinear system identification [J]. IEEE Trans on Acous, Speech, Sig Proc, 1985, 33(6): 1445-1455
- [6] 张贤达. 信号处理中的线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

(上接第 238 页)

参考文献 (References):

- [1] F Herrera, E Herrera Viedma, J L Verdegay. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments[J]. Fuzzy Sets & Syst, 1996, 78(1): 73-87.
- [2] C Feng. Fuzzy multicriteria decision making in distribution of factories: An application of approximate reasoning[J]. Fuzzy Sets & Syst, 1995, 71(2): 197-205
- [3] 张文修, 梁怡. 不确定性推理原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1996