

文章编号: 1001-0920(2002)03-0349-04

同时稳定两单输入系统控制器的解析解

王耀青

(武汉科技大学 自动化系, 湖北 武汉 430081)

摘要: 研究两个单输入控制系统的同时稳定问题。证明了同时稳定两个单输入系统控制器解存在的充分条件, 给出了设计同时稳定两单输入系统控制器的具体表达式。该方法计算简单, 便于实际控制系统设计使用。通过算例给出了该方法的具体计算步骤。

关键词: 同时稳定; 状态反馈; 特征值; 特征多项式

中图分类号: TP 13; O175.21

文献标识码: A

Analytical solution of the controller for simultaneously stabilizing two single input control systems

WANG Yao-qing

(Department of Automation, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: The problem of simultaneously stabilizing two single input systems is studied. Sufficient conditions are given for the existence of the solution to this problem, and corresponding analytical formulations are proposed to design a simultaneous stabilization controller. The proposed results can be easily applied in practical design. A numerical example demonstrates the designing procedures.

Key words: simultaneous stabilization; state feedback; eigenvalues; characteristic polynomial

1 问题的提出

考虑如下两个单输入线性定常控制系统

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \quad (2)$$

在状态反馈控制器

$$u_i(t) = -K x_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

控制下的闭环控制系统

$$\dot{x}_i(t) = (A_i - B_i K) x_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

同时稳定的问题。其中, $x_i(t) \in \mathcal{R}^{n_i}$, $u_i(t) \in \mathcal{R}^{m_i}$, $m_i = 1$ 分别是状态变量和控制变量, A_i 和 B_i 均为适

当维数的实数矩阵。

该问题是鲁棒控制和容错控制中的一个重要的研究领域, 近年来得到较多的研究^[1-3]。其研究思想一般是将系统同时稳定的控制问题转化为一个非线性约束优化问题来求解^[1,2], 或是转化为一个非线性方程组, 进而用数值方法求解^[3]。这些处理方法对解存在的充分条件难以验证, 计算也比较麻烦。当充分条件不存在时, 只能被动地试凑。文献[4,5]研究了单输入控制系统同时镇定问题的最小二乘解法及正交分解算法。但从总体上讲, 利用解析方法研究上述问题的文献还不多见。

收稿日期: 2000-12-18; 修回日期: 2001-03-23

基金项目: 湖北省自然科学基金项目(99J042)

作者简介: 王耀青(1961—), 男, 湖北黄梅人, 教授, 博士, 从事最优控制、鲁棒控制系统设计及控制系统参数化设计方法等

© 1994-2002 研究。China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

本文将给出同时稳定两单输入系统控制器的解析解以及同时镇定两个单输入系统控制器解存在的充分条件及其相应的设计方法。同文献[4, 5]相比, 本文在分析控制系统特征的基础上, 研究两个单输入控制系统同时稳定的解析解法。该结果简便易算, 具有一定的工程应用价值, 对进一步研究多个控制系统的同时稳定问题的解析解法具有指导意义。

2 条件假设及符号定义

就单个系统(1)或(2)而言, 在系统状态完全可控的条件下, 由于可以通过状态反馈对其闭环控制系统的极点进行任意配置, 所以首先定义

$$\dot{w}_i = -K_0 x_i, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

通过设计矩阵 K_0 , 至少可使系统(1)和(2)的闭环控制系统

$$\dot{x}_i(t) = (A_i - B_i K_0) x_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

中的一个渐近稳定的。不失一般性, 本文假设系统(1)是渐近稳定的。为方便起见, 同时假设系统(1)的极点互异, 并引入如下数学符号的定义。

系统(1)的开环特征多项式为 $\alpha(s)$, 即

$$\alpha(s) = \det(sI - A_1) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 \quad (7)$$

特征值为 $\mu_j, \mu_j \in C, \mu_i \neq \mu_j, i, j = 1, 2, \dots, n$, 并记

$$\Phi = [1 \quad \mu_j \quad \dots \quad \mu_j^{n-1}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$\Phi = (\Phi \quad \Phi \quad \dots \quad \Phi) \quad (9)$$

$$C_1 = (B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1)$$

$$H_1 = \begin{matrix} \text{第一行为} [a_1 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n] \text{的} \\ \text{左上三角 Toeplitz 矩阵} \end{matrix} \quad (10)$$

系统(2)的开环特征多项式为 $\beta(s)$, 即

$$\beta(s) = \det(sI - A_2) = b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0 \quad (11)$$

闭环控制系统

$$\dot{x}_2(t) = (A_2 - B_2 K) x_2(t) \quad (12)$$

的特征值为 $\lambda_j, \lambda_j \in C, j = 1, 2, \dots, n$ 。此外, 还定义

$$\Lambda_j = [1 \quad \lambda_j \quad \dots \quad \lambda_j^{n-1}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$\Phi_2 = (\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \dots \quad \Lambda_n) \quad (14)$$

$$C_2 = (B_2 \quad A_2 B_2 \quad \dots \quad A_2^{n-1} B_2)$$

$$H_2 = \begin{matrix} \text{第一行为} [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \text{的} \\ \text{左上三角 Toeplitz 矩阵} \end{matrix} \quad (15)$$

$$[\beta^0 \quad \beta^1 \quad \dots \quad \beta^{n-1}] = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)(C_1 H_1 \Phi)^{-1} C_2 H_2 \quad (16)$$

代数重根个数大于 1 的情况。

3 主要结论

引理 1 定义矩阵

$$X = (X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n) = C_1 H_1 \Phi = C_1 H_1 (\Phi \quad \Phi \quad \dots \quad \Phi) \quad (17)$$

则 X 为系统(1)的特征矢量矩阵, 即 X 满足

$$X^{-1} A_1 X = \text{diag}(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n) \quad (18)$$

引理 2 使得系统(2)的闭环特征值是 $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的状态反馈控制器可以参数化表示为

$$u_2(t) = -K x_2(t) \quad (19)$$

$$K = [\beta(\lambda_1) \quad \beta(\lambda_2) \quad \dots \quad \beta(\lambda_n)] (C_2 H_2 \Phi_2)^{-1}$$

有关引理 1 和引理 2 的结论可参阅文献[6]。

由引理 2 可以求得使系统(2)的闭环控制稳定的控制器, 但它不一定能同时使得系统(1)的闭环控制稳定。需要说明的是, 对于单输入控制系统, 在研究同时镇定问题时, 不可能实现系统闭环极点的任意配置。

下面研究矩阵 K 同时稳定系统(1)和(2)的条件及设计方法。

引理 3 当矩阵 A_1 的特征值均具有负实部时, 则矩阵 $(A_1 - B_1 R^{-1} B_1^T P)$ 的特征值均具有负实部, 其中矩阵 $R \in \mathcal{R}^{m \times m}, R = R^T > 0$, 矩阵 P 是代数 Lyapunov 矩阵方程

$$A_1^T P + P A_1 + Q = 0 \quad (20)$$

$$Q \in \mathcal{R}^{n \times n}, Q = Q^T > 0$$

的唯一对称正定解。

定理 1 系统(1)稳定。如果矩阵 K 使得系统(12)稳定, 则矩阵 K 能同时使得系统(1)闭环控制稳定的充分条件是 $K B_1 > 0$, 且存在非奇异变换矩阵 $U, U \triangleq (V^T \quad K^T)^T$, 使得

$$U A_1 U^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \triangleq A_{11A}$$

$$A_{11} \in \mathcal{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

$$A_{12} \in \mathcal{R}^{(n-1) \times 1}, \quad A_{22} \in \mathcal{R} \quad (21)$$

证明 由于系统(12)稳定, 只要证明 K 使得系统(1)的闭环控制稳定即可。

利用矩阵 U , 定义一对称正定矩阵 P

$$P = (V^T \quad K^T) \text{Block-diag}(P_1 \quad P_2) (V^T \quad K^T)^T \triangleq U^T \hat{P} U \quad (22)$$

当式(21)成立时, 定义一对称矩阵 $Q, Q = -(A_1^T P$

+ PA₁), 并由式(22) 得

$$- Q = A_1^T U^T \hat{P} U + U^T \hat{P} U A_1 = U^T (A_1^T \hat{P} + \hat{P} A_1) U \quad (23)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论, 矩阵 A₁ 的稳定性决定了存在对称正定矩阵 $\hat{P} \triangleq \text{Block-diag}(P_1 \ P_2)$, 使得矩阵 Q 对称正定。定义 A_{1c} = (A₁ - B₁K), 当 KB₁ > 0 时, 由于 $\exists R = R^T > 0, V \in \mathcal{R}^{(n-1) \times n}$, 使得 $K = R^{-1} B_1^T P$, 由引理 3 知, 矩阵 A_{1c} 总是稳定的。

下面研究矩阵 K 使得 KB₁ > 0, 且式(21) 成立的条件。需要说明的是, 矩阵 K 必须首先使得系统(12) 稳定。

定理 2 如果系统的控制器由式(19) 定义, 则系统(1) 和(2) 同稳定的充分条件是

$$KX = (0 \ \dots \ 0 \ \kappa), \quad \forall \kappa \in \mathcal{R} \quad (24)$$

证明 式(19) 定义的矩阵 K 能够稳定系统(2)。由于矩阵 X 是 A₁ 的特征向量矩阵, 所以方程(21) 可以表示为

$$\begin{bmatrix} VX \\ KX \end{bmatrix} \text{diag}(\mu_1 \ \dots \ \mu_1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} VX \\ KX \end{bmatrix}$$

当式(24) 成立时, 式(21) 也成立。此外, KB₁ = KXX⁻¹B₁ = (0 ... 0 κ)X⁻¹B₁, 根据传递函数的性质, 通过 μ_i 的适当排列, KB₁ > 0 总成立。由定理 1 可知, 定理 2 的结论成立。

引理 4 在系统(1) 稳定的条件下, 存在控制器(3) 使得系统(1) 和(2) 的闭环控制同时稳定的充分条件是存在某一实常数 κ, 使得方程

$$P(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 + \kappa(\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0) = 0 \quad (25)$$

的根均具有负实部。

证明 当方程(25) 具有根 λ_j (j = 1, 2, ..., n) 时, 可以求得

$$\begin{aligned} \beta(\lambda_j) &= -\kappa[\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}] \Lambda_j \\ j &= 1, 2, \dots, n \\ -[\beta(\lambda_1) \ \beta(\lambda_2) \ \dots \ \beta(\lambda_n)] &= \kappa[\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}] \Phi \end{aligned}$$

将式(16) 代入上式得

$$\begin{aligned} -[\beta(\lambda_1) \ \beta(\lambda_2) \ \dots \ \beta(\lambda_n)] &= \\ (0 \ \dots \ 0 \ \kappa)(C_1 H_1 \Phi)^{-1} C_2 H_2 \Phi & \end{aligned}$$

由此方程又可以求得

$$\begin{aligned} -[\beta(\lambda_1) \ \beta(\lambda_2) \ \dots \ \beta(\lambda_n)] \times \\ (C_2 H_2 \Phi)^{-1} C_1 H_1 \Phi &= KX = \\ (0 \ \dots \ 0 \ \kappa) & \end{aligned} \quad (26)$$

在方程(26) 中利用了方程(17) 和(19), 其中

$$K = -[\beta(\lambda_1) \ \beta(\lambda_2) \ \dots \ \beta(\lambda_n)](C_2 H_2 \Phi)^{-1}$$

此外, 由于 λ_j 是方程 P(s) = 0 的根, 当 Re[λ_j] < 0, j = 1, 2, ..., n 时, 根据引理 2 可知, 系统(2) 的闭环控制稳定。同时, 由于 K 满足式(26), 由定理 2 可知系统(1) 的闭环控制稳定。

根据以上结论, 可以归纳出以下定理:

定理 3 假设系统(1) 的开环控制稳定, 则控制器

$$u_i(t) = -Kx_i(t), \quad i = 1, 2$$

$$K = \kappa[\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}](C_2 H_2)^{-1} \quad (27)$$

同时稳定系统(1) 和系统(2) 的充分条件是方程

$$P(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 + \kappa(\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0) = 0 \quad (28)$$

的 n 个特征根均具有负实部。

性质 1 如果记式(28) 的特征值为 σ_j, j = 1, 2, ..., n, 则系统(12) 的特征值 λ 满足 λ = σ_j, j = 1, 2, ..., n。

性质 2 系统(1) 的闭环特征值有 n - 1 个保持不变, 另一个变小(实部更负)。

由此可见, 同时稳定系统(1) 和(2) 的关键是确定 [β₀ β₁ ... β_{n-1}], 使得 P(s) 为稳定多项式。

引理 5 方程

$$P(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 + \kappa(\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0) = 0$$

的根具有负实部的充分条件是方程

$$\chi(s) = (\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0) = 0$$

的根具有负实部。

证明 当 χ(s) 是稳定多项式时, 利用根轨迹法可以证明存在 κ, 使得 P(s) 是稳定多项式。

在系统设计时, 如果由式(16) 确定的 [β₀ β₁ ... β_{n-1}] 使得 χ(s) 为稳定多项式, 则通过 κ 可以使得 P(s) 为稳定多项式。但考虑到矩阵 K₀ 可以改变系统的结构参数, 影响 [β₀ β₁ ... β_{n-1}] 的取值, 为便于分析, 不失一般性, 设系统(2) 为可控标准型, 即 C₂H₂ = I。此时

$$\begin{aligned} [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}] &= \\ (0 \ \dots \ 0 \ 1)(C_1 H_1 \Phi)^{-1} & \end{aligned} \quad (29)$$

因此可以通过 K₀ 调整系统(1) 的结构参数, 改变 [β₀ β₁ ... β_{n-1}], 使得 χ(s) 为稳定多项式, 而不必考虑系统 $\dot{x}_2(t) = (A_2 - B_2 K_0)x_2(t)$ 的结构参数对计算 [β₀ β₁ ... β_{n-1}] 值的影响。

定理 4 定义矩阵 (A₁ - B₁K₀) 属于其某个特征值 μ_i (i = [1, n]) 的左特征矢量为 y_i。如果存在 y_i

使得 $\lambda(s) = y_i(1 - s \dots s^{n-1})^T$ 为稳定多项式, 则矩阵 $K = y_i$ 同时稳定控制系统 (1) 和 (2)。

证明 由于 K_0 是预配置矩阵, 可以重新定义 $A_1 \triangleq (A_1 - B_1K_0)$ 。根据新的定义, $C_1H_1\Phi$ 是矩阵 A_1 的特征矢量矩阵。由式 (29) 可知 $[\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}]$ 就是矩阵 $A_1 \triangleq (A_1 - B_1K_0)$ 的左特征矢量。由于式 (29) 中的 $[\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}]$ 只与系统 (1) 的结构参数有关, 且可以通过预配置矩阵 K_0 改变其结构参数, 所以可通过矩阵 K_0 达到求解满足系统设计要求的 $[\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}]$, 而不必考虑矩阵对系统 (2) 的影响。需要说明的是, 是否存在 K_0 使得 $(A_1 - B_1K_0)$ 属于其某个特征值 $\mu_i (i = [1, n])$ 的左特征矢量 y_i 使得 $\lambda(s) = y_i(1 - s \dots s^{n-1})^T$ 为稳定多项式的问题, 还有待于深入研究。

4 算 例

给出一个算例用于说明本文方法的设计过程。考虑如下两个单输入线性控制系统^[4]

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t), \quad i = 1, 2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

试求状态反馈系数矩阵 K , 使得 $u_i(t) = -Kx_i(t)$ ($i = 1, 2$) 同时稳定上述两个系统。

在本例题中取 $\kappa = 1$ 。由于系统 (1) 是不稳定的, 任意选取 $\mu_1 = -1, \mu_2 = -1.5, \mu_3 = -2$, 仿照引理 2 的结论, 求一个控制器系数矩阵 K_0 , 即

$$u_1(t) = -K_0 x_1(t)$$

$K_0 = -[\alpha(\mu_1) \ \alpha(\mu_2) \ \dots \ \alpha(\mu_n)](C_1H_1\Phi)^{-1}$ 使得矩阵 $(A_1 - B_1K_0)$ 的特征值为 $\mu_1 = -1, \mu_2 = -1.5, \mu_3 = -2$ 。在本算例中

$$\alpha(s) = s^3 - 3s^2 + 3s - 1$$

$$\beta(s) = s^3 + s^2 - s + 1$$

$$C_1H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1.5 & -2 \\ 1 & 2.25 & 4 \end{bmatrix}$$

求得 $K_0 = [15 \ 18.5 \ 7.5]$ 。预配置后, 重新定义

$$A_1 = (A_1 - B_1K_0), A_2 = (A_2 - B_2K_0), \Phi \text{ 不变,}$$

$$C_1H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -29.25 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2H_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

根据式 (16) 求得 $[\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2] = [5 \ 4.5 \ 1]$ 。此时, 方程

$$P(s) = s^3 + (b_2 + \kappa\beta_2)s^2 + (b_1 + \kappa\beta_1)s + (b_0 + \kappa\beta_0) = s^3 + 5.75s^2 + 12.75s + 13.5 = 0$$

具有根 $\{-3.00 \ -1.38 \pm 1.62j\}$, 所以存在同时稳定控制系统 (1) 和 (2) 的控制器 (19)。根据式 (19) 可以求得控制器为

$$u_i(t) = -Kx_i(t)$$

$$K = \kappa[\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}](C_2H_2)^{-1} = [10 \ 9 \ 2], \quad i = 1, 2$$

且 $A_{1c} = (A_1 - B_1K)$ 和 $A_{2c} = (A_2 - B_2K)$ 的特征值分别是 $\{-1.0 \ -1.5 \ -4.0\}$ 和 $\{-3.00 \ -1.38 \pm 1.62j\}$ 。其中 $A_{2c} = (A_2 - B_2K)$ 的特征值就是多项式方程 $P(s) = 0$ 的根。实际上, 通过改变 κ 值, 有时可以改善系统的动态特性。

5 结 语

本文的研究思想是通过分析控制系统之间的特征规律, 研究两个单输入控制系统同时稳定的解析解法。尽管文中只研究了特征值互异的情况, 但其推导过程完全适合于非互异特征值情形。所得方法计算简单, 便于工程应用, 对进一步深入研究线性多变量控制系统的同时镇定问题具有一定指导意义。需要指出的是, 文中 K_0 的预配置可能会影响问题的求解, 对 $\mu_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的选取还存在一定的任意性。这一问题有待于深入研究。

参考文献 (References):

- [1] Paskota M, et al. Optimal simultaneous stabilization of linear single-input systems via linear state feedback control[J]. Int J of Control, 1994, 60(3): 483-498.
- [2] Howitt G D, Luus R. Simultaneous stabilization of linear single-input systems by linear state feedback control[J]. Int J of Control, 1991, 54(5): 1015-1030.

(下转第 356 页)

库所的实际输出和输入采样进行辨识,修正式(5),计算出与之对应的 h_{p5} 。其中,对 P_5 库所的实际输出的采样是将输入代入式(4)得到。当其变化较大时,结束上一个滚动窗口,开始下一个滚动窗口。

仿真结果如图3~图6所示。其中图3为不加监控时调度的Gant图,且 P_5 库所对应的差分方程为方程(5),其 h_{p5} 一直都为2.0;图4为在调度中加入了监控的Gant图,仿真实验中,在 $t = 6.4$ 时刻,其对应的 h_{p5} 由2.0变成2.3,在 $t = 14$ 时刻, h_{p5} 又由2.3变成2.5;图5为对应于准确方程(4)调度的Gant图;图6为20个时间单位内的利润变化图,其中点划线对应图3,点线对应图4,实线对应图5。

图6中,在 $time = 20$ 时刻,与图3,图4及图5分别对应的调度所得利润为22 615.9,26 006.9和28 422.2个价格单位,可以看出,加入监控后的调度结果比未加监控时要好得多。虽然图4的调度结

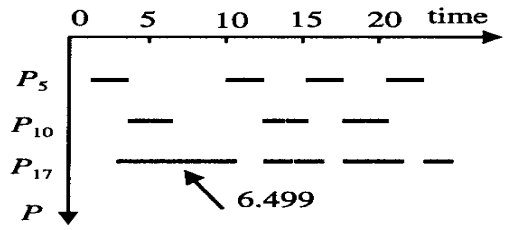


图5 对应于准确模型的Gant图

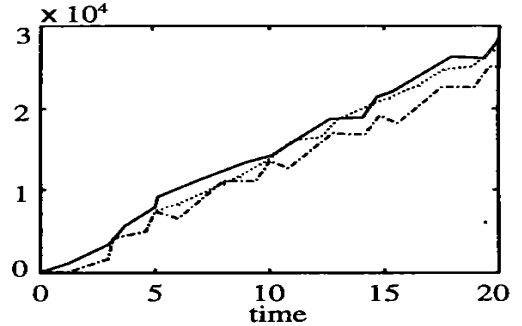


图6 利润变化图

果比图5的结果要差一些,但比较两者可以发现,图4中在 $time = 25.301$ 以后的激发序列和图5在 $time = 6.499$ 以后的激发序列相同,这说明加入监控后其调度结果向图5的结果靠近。

由以上分析可知本文算法是有效的。通过在线辨识不断修正调度所用的模型,改变调度策略,从而达到了监控与调度集成的目的。

参考文献(References):

[1] 王朝晖,陈浩勋,甘文泉,等. Multipurpose 批处理过程短期调度的滚动时域方法[J]. 控制理论与应用(Control Theory & Applications), 1998, 15(4): 567-574.
 [2] 方剑,席裕庚. 基于遗传算法的滚动调度策略[J]. 控制理论与应用(Control Theory & Applications), 1997, 14(4): 589-594.
 [3] 刘斌,曾建潮. 一种基于CTCH网的动态调度算法[J]. 自动化学报(Acta Automatica Sinica), 2000, 26(增刊B): 120-124.

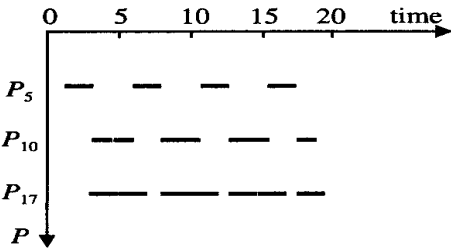


图3 未引入监控的Gant图

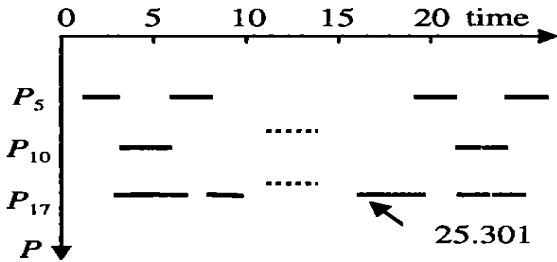


图4 引入监控的Gant图

(上接第352页)

[3] 赵明旺. 状态反馈同时镇定的非线性方程数值解[J]. 控制理论与应用(Control Theory & Applications), 1996, 13(5): 667-671.
 [4] 王耀青. 同阶单输入控制系统的同时镇定问题[J]. 武汉科技大学学报(J of Wuhan Univ of Science & Technology), 1999, 22(2): 175-178.

[5] 王耀青. 同时稳定 r 个单输入系统控制问题的最小二乘解法[J]. 信息与控制(Information and Control), 2000, 29(7): 657-660.
 [6] 王耀青. LQ逆问题解的一种有效算法[J]. 控制理论与应用(Control Theory & Applications), 1992, 9(1): 9-15.