

文章编号: 1001-0920(2002)03-0364-04

直线伺服 6 位置环虚拟轴机床的运动学解耦

郭庆鼎, 刘洋

(沈阳工业大学 电气工程学院, 辽宁 沈阳 110023)

摘要: 使用直线电机驱动虚拟轴机床, 可满足高速时动态响应和提高精度的要求。如何解决 6 位置环虚拟轴机床的强耦合, 一直是虚拟轴机床伺服控制中的一个难题。为此, 将局部结构化方法与解耦理论相结合, 提出一种新的解耦算法, 从理论上实现了对 6 位置环虚拟轴机床的平动和转动之间的解耦。
关键词: 解耦; 6 位置环虚拟轴机床; 运动学逆解; 直线电机

中图分类号: TP 271.2

文献标识码: A

Local structurization method of kinematic decoupling control for 6-pole virtual-axis NC machine tool

GUO Qing-ding, LIU Yang

(College of Electric Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China)

Abstract: Using linear motors to actuate virtual-axis machine tool can meet the requirements of high performance. Decoupling is always a difficult problem in the field of virtual-axis machine tool servo-control. Local structurization method is combined with the theory of decoupling and a new decoupling algorithm is proposed. For 6 position-loop machine tool, decoupling between parallel motion and rotation is realized theoretically.

Key words: decoupling; 6 position-loop machine tool; inverse kinematics solution; linear motor

1 引言

为适应高精度、高速度加工的要求, 近年发展起来一种并联机床(虚拟轴机床)。由于它与串联机床相比具有运动链质量小(加速度大)、刚度高、机械结构简单等优点, 因而被誉为“21 世纪的机床”。

高速加工必须具有很高的进给速度和加速度, 而使用直线电机可避免滚珠丝杠(齿轮、齿条)传动中的反向间隙、惯性、摩擦力和刚度不足等缺点, 从而实现了无接触直接驱动, 以至于可达到 160 m/

min 以上的速度和 2.5 g 以上(甚至 10 g 以上^[1])的加速度, 定位精度也可高达 0.5~0.05 μm ^[2]。这样便获得了高精度、高速度的位移运动(在高速中极高的定位精度和重复定位精度), 并具有极好的稳定性。

尽管并联机床的机械结构不断得到简化, 却增加了控制上的难度, 尤其在解决虚拟轴机床的 6 个驱动杆之间的强机械耦合方面。国内外已有许多文献^[3~8]对此进行了研究, 但仍未得到解决。因此, 对虚拟轴机床的解耦成为一个亟待解决的难点问题。

收稿日期: 2000-12-18; 修回日期: 2001-04-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(50075057)

作者简介: 郭庆鼎(1939—), 男, 辽宁盖县人, 教授, 博士生导师, 从事交流伺服、数控技术、鲁棒控制等研究; 刘洋(1977—), 男, 山东淄博人, 硕士生, 从事交流伺服、数控机床等研究。

本文在使用直线电机驱动杆的基础上, 将局部结构化思想和解耦理论相结合, 得到一种新的解耦算法, 从而解决了虚拟轴机床平动和转动之间的耦合问题。

2 直线电机的数学模型

直线式永磁同步电动机(PMLSM)是直接交流电能转换为直线运动的推力装置, 其基本结构和原理详见文献[9]。该系统电流内环采用磁场定向矢量控制技术, 使动子电流矢量与定子磁场在空间正交, 动子电流的去磁分量 $i_d = 0$ 。系统的简化数学模型如下

$$F_e = K_f i_q = \frac{\pi}{\tau} \phi i_q \quad (1)$$

$$F_e = K_f i_q = M \frac{dv}{dt} + Bv + F_l \quad (2)$$

$$s = vdt \quad (3)$$

其中: M 是动子质量, B 是粘滞摩擦系数, v 是动子线速度, F_l 是负载阻力, F_e 是电磁推力, K_f 是推力系数, s 是动子机械位移, ϕ 是永磁体有效磁通, τ 是极距。

3 并联机构的运动学逆解

6 位置环虚拟轴机床是建立在 Stewart 平台并联机构运动的基础之上, 虽然其有多种装配模型^[10], 但 6 荚结构可以获得最大可能的自由度。本文的 6 位置环虚拟轴机床的模型就是建立在这种结构模型之上, 如图 1 所示。

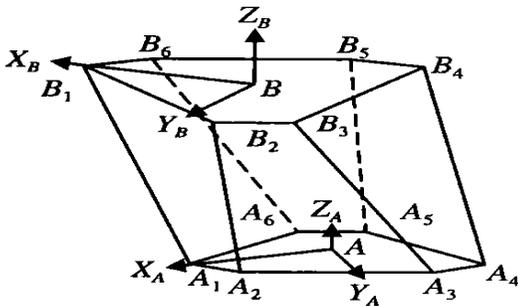


图 1 Stewart 平台的结构示意图

为便于分析, 特做如下约定:

1) 选取平台的质心作为坐标原点, $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 分别为建立在动、静两个平台上的笛卡尔坐标系, 其中 A 和 B 分别表示坐标系的原点, 设 X_A 和 X_B 轴分别通过 A_1 和 B_1 两点;

2) 本机构均采用球形或柱形关节, 简称为 G/P

结构;

3) $A_1 A_3 = 120^\circ$; $A_3 A_5 = 120^\circ$; $B_1 B_3 = 120^\circ$; $B_3 B_5 = 120^\circ$; 从而机构为对称结构。

设 ${}^A a_i = (a_{ix}, a_{iy}, a_{iz})^T$ 表示 A_i 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置, ${}^B b_i = (b_{ix}, b_{iy}, b_{iz})^T$ 表示 B_i 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置, 而且 ${}^A a_i$ 与 X_A 的夹角为 λ , ${}^B b_i$ 与 X_B 的夹角为 ψ 。 ρ_A 和 ρ_B 分别为平台 A 和 B 的外接圆半径。

$${}^A a_i = [\rho_A \cos(\lambda), \rho_A \sin(\lambda), 0] \quad (4)$$

$${}^B b_i = [\rho_B \cos(\psi), \rho_B \sin(\psi), 0] \quad (5)$$

设 ${}^B q_i = (q_{ix}, q_{iy}, q_{iz})^T$ 为杆长矢量

$${}^B q_i = {}^B a_i - {}^B b_i \quad (6)$$

设 ${}^B p = (x, y, z)^T$ 为从静平台的坐标原点 B 到动平台的坐标原点 A 的矢量, 而转动矩阵 ${}^B R$ 表明了坐标系 $\{A\}$ 与 $\{B\}$ 之间的关系, 则

$${}^B a_i = {}^B R {}^A a_i + {}^B p \quad (7)$$

于是杆长矢量可表示为

$$q_i = p_i + p - b_i \quad (8)$$

其中, q_i, p_i, b_i, p 分别对应于 ${}^B q_i, {}^B R {}^A a_i, {}^B b_i, {}^B p$, 且 $q_i = (q_{ix}, q_{iy}, q_{iz})^T, {}^B R = (r_{ij})_{3 \times 3}$

$$q_i = \begin{bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ y_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}a_{ix} + r_{12}a_{iy} + r_{13}a_{iz} + x - b_{ix} \\ r_{21}a_{ix} + r_{22}a_{iy} + r_{23}a_{iz} + y - b_{iy} \\ r_{31}a_{ix} + r_{32}a_{iy} + r_{33}a_{iz} + z - b_{iz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

所以杆长为

$$q_i = (q_{ix}^2 + q_{iy}^2 + q_{iz}^2)^{1/2} \quad (10)$$

此即著名的 Stewart 平台运动学逆解方程。

由上述分析可知 $a_{iz} = 0, b_{iz} = 0$, 且有 $a_{ix}^2 + a_{iy}^2 + a_{iz}^2 = \rho_A^2, b_{ix}^2 + b_{iy}^2 + b_{iz}^2 = \rho_B^2$ 。进而根据旋转矩阵特性^[11], 则有

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 =$$

$$r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1$$

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0$$

$$r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0$$

$$r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} = 0$$

式(10) 可写为

$$q_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(a_{ix}r_{11} + a_{iy}r_{12})(x - b_{ix}) + 2(a_{ix}r_{21} + a_{iy}r_{22})(y - b_{iy}) + \rho_A^2 + \rho_B^2 + 2(a_{ix}r_{31} + a_{iy}r_{32})z - 2(xb_{ix} + yb_{iy}) \quad (11)$$

若使用 Euler 角, 则旋转矩阵 ${}^B R$ 为

$${}^B R = \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & C\alpha S\beta S\gamma - S\alpha C\gamma & C\alpha S\beta C\gamma + S\alpha S\gamma \\ S\alpha C\beta & S\alpha S\beta S\gamma + C\alpha C\gamma & S\alpha S\beta C\gamma - C\alpha S\gamma \\ -S\beta & C\beta S\gamma & C\beta C\gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中, C 为 \cos , S 为 \sin , α, β, γ 分别表示旋转角。

若 $q = [q_1, q_2, \dots, q_6]^T$ 表示 6 荚机构的杆长矢量, Jacobian 矩阵 J 表征动平台的位姿 x 变化和 q 变化之间的关系^[7], 即

$$\dot{\hat{q}} = J \dot{\hat{x}} \quad (13)$$

其中 $x = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$
 则 $\dot{x} = [p \quad \Phi]^T$, 而 p 和 Φ 分别表示杆的线速度和角速度。

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{q_1} q_1^T & \frac{1}{q_1} (p_1 \times q_1)^T \\ \frac{1}{q_6} q_6^T & \frac{1}{q_1} (p_6 \times q_6)^T \end{bmatrix}$$

我们所设计的解耦矩阵正是源于此 Jacobian 矩阵。

4 局部结构化法 (LSM) 简介

LSM 可用于解决并联机构的前向运动学问题 (FKP), 即运动学正解问题, 其基本思想是:

- 1) 如果并联机构能分解成如四面体、三角形之类的最小结构单元, 同时又知它们自身之间的关系, 我们就可以解决并联机构前向运动学问题;
- 2) 如果并联机构不能分解成最小结构单元, 则可使用传感器, 利用虚拟连接 (virtual link) 进行分解;
- 3) 假设可以测定它们的几条边, 那么四面体 (空间中) 或三角形 (平面中) 便得以构建, 从而可获得其在坐标系中的所有关系;
- 4) 如果一个 G/P 机构可解, 而其它 G/P 机构又与其共享一条或几条边, 那么局部结构化便可由平台延拓至整个并联机构。

因为使用了传感器, 所以与 q_1 有关的信息均可测知, 因此与 q_1 有关的信息可作为已知条件处理。如图 2 所示, 由于 A_1 与 B_1 已知, 因此长度 $A_1 B_1$,

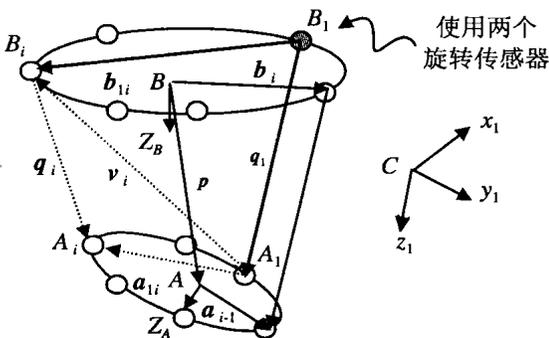


图 2 Stewart 平台的局部结构化分割

$B_1 A_1, A_1 A_2$ 可知。如设 $A_1 B_1$ 为矢量 $v_1, A_1 A_2$ 为矢量 $a_{12}, B_1 A_2$ 为杆长矢量 $q_1 (i = 2, \dots, 6)$, 则 G/P 机构可以通过 $v_1 \cdot a_{12} = \frac{1}{2} (v_1^2 + a_{12}^2 - q_1^2)$ 解出, 从而可得到动平台的位姿。关于 LSM 的详细论述见文献 [12]。

5 解耦矩阵的得出

对于传感器数目的选择, 应充分考虑到补充值、并联机构的复杂程度与计算时间之间的关系 (其中, 补充值为对于运动学逆解起修正作用的传感器的测量值; 机构的复杂程度随传感器数目的增加而增加; 计算时间随使用的传感器数目的减少而增大^[13])。因此, 本文中使用的传感器数是满足要求的最小数目。

因为 Jacobian 矩阵形式复杂, 不便于分析, 所以我们对 Jacobian 矩阵 J 进行如下处理后, 式 (13) 变为

$$C \dot{\hat{q}} = D \dot{\hat{x}} \quad (14)$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q_6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} q_1^T & (p_1 \times q_1)^T \\ \vdots & \vdots \\ q_6^T & (p_6 \times q_6)^T \end{bmatrix}$$

矢量 $v_i (i = 2, \dots, 6)$ 可表示为

$$v_i = a_{i1} - q_i = b_{1i} - q_1 \quad (15)$$

其中 $B_1 B_i$ 为矢量 b_{1i} , 则

$$\dot{v}_i = \dot{a}_{i1} - \dot{q}_i = -\dot{q}_1 \quad (16)$$

由 $v_i \cdot a_{12} = \frac{1}{2} (v_i^2 + a_{12}^2 - q_i^2)$, 可得

$$q_i \dot{q}_i = q_i \cdot \dot{q}_1 + q_1 \cdot \dot{a}_{i1}, \quad i = 2, \dots, 6 \quad (17)$$

为便于进一步分析, 我们建立一个传感器笛卡尔坐标系, 即杆坐标系 $\{C\}$, 以 q_1 的方向为 z_1 轴方向, x_1 轴在 $B_1 B_2 A_1$ 平面上并指向机构外, y_1 轴根据右手定则确定。则静平台坐标系与杆坐标系之间的关系可用旋转矩阵 R_1 表示。设 α, β, γ 分别为坐标轴 z_1, y_1, x_1 关于坐标系 $\{B\}$ 旋转角, 则仿式 (11) 可设 ${}^B C R = \{n_1, j_1, s_1\}$ 。从而在 $\{C\}$ 下 q_1 可以描述为

$$q_1 = q_1 \cdot s_1 \quad (18)$$

假定 $\dot{\alpha} = 0$, 且 ${}^B R$ 中的各列依次对 α, β, γ 求导得

$$\dot{s}_1 = E \cdot \omega \quad (19)$$

其中, $E = [\sin \gamma \cdot n_1, -j_1]$ 为传感器的速度矩阵,

$\omega = [\dot{\beta}_i, \dot{\gamma}_i]^T$ 为传感器的角速度。

进而可以得到

$$q_i \dot{q}_i = q_i \cdot \dot{q}_1 \cdot s_i + q_i \cdot q_1 (E\omega) + (a_{1i} \times q_i) \cdot \dot{\Phi} \quad (20)$$

因为 $q_1 E\omega = \dot{p} + \dot{p}_1 - \dot{q}_1 s_1$

利用 E 的伪逆矩阵, 可推出传感器角速度 ω 为

$$\omega = \frac{1}{q_1} (E^T E)^{-1} E^T (\dot{p} + \dot{p}_1 - \dot{q}_1 s_1)$$

注意到 $(E^T E)^{-1} E^T$ 中有 n_1 和 j_1 项, 所以传感器的速度可表示为

$$\omega = \frac{1}{q_1} (E^T E)^{-1} E^T (\dot{p} + \dot{p}_1) \quad (21)$$

至此已明确地得到了传感器速度。进而将式

(21) 代入 (20) 得

$$q_i \dot{q}_i - s_i \dot{q}_1 = (n_i \cdot n_1^T + j_i \cdot j_1^T) \cdot \dot{p} + [n_i (p_1 \times n_i)^T + j_1 (p_1 \times j_i)^T + (a_{1i} \times q_i)^T] \cdot \dot{\Phi}$$

其中, $n_i = q_i^T \cdot n_1, j_i = q_i^T \cdot j_1, s_i = q_i^T \cdot s_1, i = 2, \dots, 6$

这样, 虽然从 Jacobian 矩阵中消去了传感器速度 ω 但却保留了与传感器有关的所有信息。于是式 (12) 可改写为

$$\hat{C} \hat{a}_1 = \hat{D} \hat{\alpha} \quad (22)$$

其中 $\hat{C} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ s_2 & q_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & q_5 & 0 \\ s_6 & 0 & \dots & 0 & q_6 \end{bmatrix}$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} n_1 n_1^T + j_1 j_1^T \\ n_i (p_1 \times n_i)^T + j_i (p_1 \times j_i)^T + (a_{1i} \times q_i)^T \end{bmatrix}$$

注意到在 \hat{D} 中包含有 n_1 和 j_1 , 也就是与传感器有关的信息, 因此在传感器坐标系中, 杆矢量 q_i 可得到清晰的表达。在只进行列变换的条件下, 可将矩阵算子 F 用于高斯消元法中。

令 $\tilde{C} = F\hat{C}, \tilde{D} = F\hat{D}$, 得

$$\tilde{C} \hat{a}_1 = \tilde{D} \hat{\alpha} \quad (23)$$

其中 $\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & C_3 \end{bmatrix}, \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & D_3 \end{bmatrix}$

这样对 \hat{D} 进行处理, 便可得到上三角解耦矩阵, 即

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1j} \\ q_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中, q_{ij} 是由杆速度矩阵 \hat{a}_1 中前三项构成的矩阵,

q_{2j} 是由杆速度矩阵 \hat{a}_1 中后三项构成的矩阵。

由于虚拟轴机床在高速加工中, 运动平台的位姿是在几十 μs 或更短的时间内完成, 因此设 $[t_0, t_n]$ 为机床运动平台的一个位姿完成的时域。如果将 $[t_0, t_n]$ 分解成多个微单元, 即 $t_0 \quad t_1 \quad \dots \quad t_{n-1} \quad t_n$, 那么可以认为, 在时域 $[t_i, t_{i+1}] (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 内运动平台只有平动而无转动 (即 $\dot{\Phi} = 0$), 或只有转动而无平动 (即 $\dot{p} = 0$)。这样, 运动平台的最终位姿可以理解为是由每个微时域内的平动和转动的合成与积累的结果。

因此在不考虑机构的奇异位形的情况下, 可得到下面的解耦矩阵

$$\begin{bmatrix} q_{1j} \\ q_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (25)$$

由此我们实现了对虚拟轴机床的运动学解耦, 并且注意到当动平台位姿给定后, 解耦矩阵便成为常数矩阵。

6 结 语

本文将局部结构化的思想与解耦理论相结合, 提出一种新的解耦算法, 由此实现 6 位置环虚拟轴机床的平动与转动之间的解耦, 为高速度、高精度的虚拟轴机床伺服控制提供了理论依据。在此基础上, 我们将进一步研究利用其它控制算法实现对 6 位置环虚拟轴机床的高精度控制。

参考文献 (References):

[1] Bernhard Sprenger. Design of a high speed and high precision 3 DOF linear direct drive [A]. IEEE/A SME Int Conf on Advanced Intelligent Mechatronics'97 [C]. Tokyo, 1997. 200-210

[2] 陈焯. 超高速数控机床控制系统的发展 [J]. 制造技术与机床 (Manufacturing Technology & Machine Tool), 2000, (5): 12-14

[3] Vincent Hayward, Chafye Nemri, Xianze Chen, et al. Kinematic decoupling in mechanism and application to a passive hand controller design [J]. J Robotic Syst, 1993, 10(5): 767-790

[4] Luc Baron, Jorge Angeles. The decoupling of the direct kinematics of parallel manipulators using redundant sensor [J]. Proc IEEE Int Conf Robotics and Automation, 1994, 2(3): 974-979

(下转第 371 页)

次漂移系数 D_{iz} , 沿着 X 陀螺转子轴的一次漂移系数 D_{sx} 和 X 陀螺的平面内安装误差角 η_i 为例, 给出这两种情况下参数的估计曲线对比(单位中 h 表示小时, g 表示一个标准重力加速度)。

从图 1 可以看出, 基于式(5)的滤波器所得到的参数 D_{iz} , D_{sx} 和 η_i 的估计曲线能够从所选取的不同初始值分别收敛到 1.6, 0.2 和 100 附近, 据此可以判断这些参数的真实值也分别在这些值的附近。而基于式(6)的滤波器所得到的图 2 曲线则显示, 当对这些参数选取不同的估计初值时, 虽然 D_{iz} 的估计曲线也呈现较明显的收敛趋势, 但其收敛程度显著低于图 1 对应曲线, D_{sx} 的估计曲线收敛程度更差, 而安装误差角 η_i 的估计曲线则自始至终一直游摆不定, 没有收敛的迹象。这表明基于(6)的滤波器对 D_{iz} , D_{sx} 和 η_i 的估计结果精度较差, 甚至根本不可靠。这与上节的结论一致。

表 1 为两组辨识结束时刻滤波器所给出的这几个参数的估计结果及其标准差。从表 1 看, 基于式(5)的估计结果与此前单表元件级测试的结果比较接近, 基本是可靠的; 而基于式(6)进行的辨识, 除了 η_i 的最后估计标准差比基于式(5)的情形稍大一些外, 其它参数的标准差与基于式(5)的情形基本相同。如果只根据标准差判断, 便会误认为基于式(6)估计是准确的, 这一点有很大的欺骗性。只有通过其它方法对其进行检验(譬如对估计初值不同的情况下得到的结果进行比较, 或同单表测试的结果

比较), 才会发现基于错误的平台模型辨识得到的结果其实是不可靠的。

5 结 语

本文所推导的惯导平台漂移模型纠正了以往模型中与陀螺安装误差角有关的错误。该模型更符合平台漂移的发生机理, 因此可以保证基于 Kalman 滤波器的估计程序对平台漂移误差参数采用系统级辨识得到可靠的辨识结果。

参考文献(References):

- [1] Frazier J Hellings. Application of extended Kalman filtering to a dynamic laboratory calibration of an inertial navigation system [R]. 1973, AD-763718: 32-35.
- [2] Kitzersw R A. Design, development and laboratory test results of Kalman filter system-level MU Calibration Technique [R]. 1975, AD-A 046257: 17-26.
- [3] Jiang Y F, Lin Y P. Error estimation of NS ground alignment through observability analysis [J]. IEEE Trans on AES, 1992, 28(1): 92-96.
- [4] Stimac L W. Sensor alignment Kalman filters for inertial stabilization systems [A]. IEEE Position Location and Navigation Symposium [C]. Monterey: IEEE, 1992 4-13.
- [5] 付振宪, 裴昕国. 惯导平台漂移误差参数辨识的实验研究 [J]. 中国惯性技术学报 (J of Chinese Inertial Technology), 1999, 7(4): 12-15.

(上接第 367 页)

- [5] 周凯. 虚拟轴数控机床的虚实映射联动控制 [J]. 中国机械工程 (Chinese Mechanical Engineering), 1998, 9(3): 16-18.
- [6] B Dasgupta, P Choudhury. A general strategy based on the Newton-Euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators [J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(2): 801-824.
- [7] E M cinroy John, F O Brien John, W Neat Gregory. Precise, fault-tolerant pointing using a Stewart platform [J]. IEEE/ASME TRAC on Mechatronics, 1999, 4(1): 91-95.
- [8] 郭庆鼎, 勾丽丽, 张凤. 交流直线伺服电机虚拟轴数控机床实现精确与容错控制 [A]. 第一届国际机械工程技术学术会议 [C]. 上海, 2000.
- [9] 郭庆鼎, 王成元, 周美文, 等. 直线交流伺服系统的精密控制技术 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [10] Merlet J P. Direct kinematics and assembly modes of parallel manipulators [J]. Int J Robotics Research, 1992, 11(2): 150-162.
- [11] 王敬庚, 傅若男. 空间解析几何 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1999.
- [12] H Kilryong, C Wankyun, Y Youm. New resolution scheme of the forward kinematics of parallel manipulators using extra sensors [J]. Trans Mech Design, 1996, 118(3): 214-219.
- [13] Merlet J P. Closed-form resolution of the direct kinematics of parallel manipulators using extra sensors data [J]. Proc 1993 IEEE Int Robotics and Automation Conf, 1993, 3(4): 200-240.