

文章编号: 1001-0920(2002)04-0427-04

# 基于 Riccati 方程解的非线性降维观测器

朱芳来<sup>1,2</sup>, 韩正之<sup>2</sup>

(1. 桂林电子工业学院 计算机系, 广西 桂林 541004; 2. 上海交通大学 自动化系, 上海 200030)

**摘要:** 对 Lipschitz 非线性系统降维观测器进行讨论。在代数 Riccati 方程有正定解的前提下, 指出 Lipschitz 非线性系统存在降维观测器, 它取决于所考虑的代数 Riccati 方程的正定解。给出了降维观测器的设计方法, 机器人模型的仿真结果表明其具有实用性。

**关键词:** 降维观测器; Riccati 方程; Lipschitz 条件; 非线性

中图分类号: TP 13 文献标识码: A

## Nonlinear reduced-order observers based on the solution of Riccati equation

ZHU Fang-lai<sup>1,2</sup>, HAN Zheng-zhi<sup>2</sup>

(1. Department of Computer, Guilin Institute of Electronic Technology, Guilin 541004, China;

2. Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** The reduced-order observer design problems of Lipschitz nonlinear systems are discussed. The reduced-order observer for Lipschitz nonlinear system is based on the solution of a Riccati equation. To examine the practical usefulness of the proposed observers, it is applied to a real robotic mode. The simulation results show that the proposed reduced-order observer has good performances.

**Key words:** reduced-order observer; Riccati equation; Lipschitz conditions; nonlinearity

## 1 引言

控制系统的状态反馈对各种综合问题显示出极大的优越性, 系统的极点配置、镇定、解耦控制、无静差跟踪以及线性二次型最优控制, 都需要引入适当的状态反馈才能实现。但是或者由于不易直接测量, 或者由于测量手段在经济上和使用上的限制, 使得不可能获得实际系统的全部状态变量。状态观测器的主要目的就是利用系统的已知信息估计出系统的未知状态。对于线性系统, 著名的 Kalman 滤波器<sup>[1, 2]</sup>和 Luenberger 观测器设计方法<sup>[3]</sup>已为系统的

观测器设计提供了较为完善的答案。对于非线性系统, 观测器设计是一项具有复杂性的研究工作, 并引起了众多学者的关注。一般说, 有如下几类非线性观测器设计方法: 扩展 Kalman 滤波器<sup>[4-7]</sup>及扩展 Luenberger 观测器方法<sup>[8]</sup>, 非线性坐标变换<sup>[9-11]</sup>及类 Lyapunov 方法<sup>[12, 13]</sup>。

与线性系统一样, 非线性系统按其结构可分为全维观测器和降维观测器。降维观测器维数相对较低, 因而只需较少的积分器便可构造, 这就使得整个反馈系统结构大为简化。为此, 本文对 Lipschitz 非线性系统降维观测器设计方法进行讨论。

收稿日期: 2001-06-11; 修回日期: 2001-08-20

作者简介: 朱芳来(1965—), 男, 广西兴安人, 副教授, 博士生, 从事非线性互质分解、系统观测器设计等研究; 韩正之

(1947—), 男, 浙江慈溪人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究。

本文使用下列记号:

$R^{m \times n}$  表示  $m \times n$  实矩阵全体;  $I_p$  表示  $p \times p$  阶单位矩阵;  $\cdot$  表示向量的 Euclidean 范数; 矩阵  $A$  称为稳定矩阵, 如果其所有特征值均在复平面的左半平面; 设  $P_1$  和  $P_2$  为两正定矩阵, 如果  $P_1 - P_2$  是正定矩阵, 则记为  $P_1 > P_2$ 。

## 2 降维观测器的设计

本文所考虑的非线性对象可描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \Phi(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p, \Phi: R^n \times R^m \rightarrow R^n, A \in R^{n \times n}, C \in R^{p \times n}$  且  $(A, C)$  可观测,  $\Phi(x, u)$  为全局 Lipschitz 函数, 即存在正整数  $\gamma$  使得

$$\|\Phi(x_1, u) - \Phi(x_2, u)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| \quad \forall u \in R^m, x_1, x_2 \in R^n \quad (2)$$

其中  $\gamma$  称为 Lipschitz 常数。

在观测器设计方面, 许多学者对 Lipschitz 非线性系统作了研究和讨论<sup>[13-15]</sup>。很多非线性函数是 Lipschitz 的, 至少在局部意义下是这样, 例如  $x^2$  在局部意义下就是 Lipschitz 函数。在机械及机器人技术中, 所需控制对象很多是 Lipschitz 非线性系统。本节讨论的降维观测器设计方法, 均取决于如下假设中代数 Riccati 方程的可解性及其求解。

**假设 1** 对于系统(1) 非线性项的 Lipschitz 常数  $\gamma$ , 存在正数  $\epsilon$  和矩阵  $K \in R^{n \times p}$ , 使得如下代数 Riccati 方程有正定解  $P$

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + \gamma^2 P P + I + \epsilon I = 0 \quad (3)$$

以下基于对 Riccati 方程的求解, 给出系统(1) 降维观测器的设计方法。为简单起见, 不妨假定  $C = (I_p \ 0)$ 。在假设 1 成立的前提下, 对矩阵  $A$  和代数 Riccati 方程的正定解  $P$  进行矩阵分解

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}$$

其中,  $A_{11} \in R^{p \times p}, A_{12} \in R^{p \times (n-p)}, A_{21} \in R^{(n-p) \times p}, A_{22} \in R^{(n-p) \times (n-p)}$ 。对 Riccati 方程(3) 按分块展开, 并由第 2 行第 2 列分块得

$$P_3(A_{22} + LA_{12}) + (A_{22} + LA_{12})^T P_3 + \gamma^2 P_3 P_3 + \gamma^2 P_2^T P_2 + I_{n-p} + \epsilon I_{n-p} = 0 \quad (4)$$

其中

$$L = P_3^{-1} P_2^T \in R^{(n-p) \times p} \quad (5)$$

式(4) 表明  $P_3(A_{22} + LA_{12}) + (A_{22} + LA_{12})^T P_3 + \gamma^2 P_3 P_3 + \gamma^2 P_2^T P_2 + I_{n-p} > 0$ 。需要指出的是, 假定  $C$  具有  $(I_p \ 0)$  的形式并

$$P_3(A_{22} + LA_{12}) + (A_{22} + LA_{12})^T P_3 + \gamma^2 P_3 P_3 + \gamma^2 P_2^T P_2 + I_{n-p} > 0 \quad (6)$$

**定理 1** 设  $C = (I_p \ 0)$ , 则在假设 1 成立的前提下, 非线性系统(1) 具有  $(n-p)$  维降维观测器, 其形式如下

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{z}_1 = y \\ \dot{\hat{z}}_2 = (A_{22} + LA_{12}) \hat{z}_2 + [L(A_{11} - A_{12}L) + A_{21} - A_{22}L]y + \Phi^* \left( \begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_2 - Ly \end{bmatrix}, u \right) \\ \hat{x}_2 = \hat{z}_2 - Ly \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $\Phi^*(x, u) = (L \ I_{n-p}) \Phi(x, u)$ ,  $L$  由式(5) 给出。

**证明** 进行等价坐标变换  $z = Tx$ , 其中  $T =$

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ L & I_{n-p} \end{bmatrix}, \text{ 则系统(1) 等价于 } \begin{cases} \dot{z}_2 = (A_{22} + LA_{12})z_2 + [L(A_{11} - A_{12}L) + A_{21} - A_{22}L]y + \Phi^* \left( \begin{bmatrix} y \\ z_2 - Ly \end{bmatrix}, u \right) \\ y = z_1 \end{cases} \quad (8)$$

式(8) 第 1 式减式(7) 第 2 式, 得观测器误差动态方程

$$\dot{\tilde{z}}_2 = (A_{22} + LA_{12})\tilde{z}_2 + (L \ I_{n-p}) \tilde{\Phi} \quad (9)$$

其中

$$\tilde{z}_2 = z_2 - \hat{z}_2, \quad \tilde{\Phi} = \Phi \left( \begin{bmatrix} y \\ z_2 - Ly \end{bmatrix}, u \right) - \Phi \left( \begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_2 - Ly \end{bmatrix}, u \right)$$

考虑 Lyapunov 函数  $V = \tilde{z}_2^T P_3 \tilde{z}_2$ , 其沿着误差方程(9) 的微分是

$$\dot{V} = \tilde{z}_2^T [(A_{22} + LA_{12})^T P_3 + P_3(A_{22} + LA_{12})] \tilde{z}_2 + 2\tilde{z}_2^T P_3 (L \ I_{n-p}) \tilde{\Phi} \quad (10)$$

由于

$$2\tilde{z}_2^T P_3 (L \ I_{n-p}) \tilde{\Phi} \leq 2|\tilde{z}_2^T P_3 (L \ I_{n-p}) \tilde{\Phi}| \leq \gamma^2 \tilde{z}_2^T P_3 (LL^T + I_{n-p}) P_3 \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2^T \tilde{z}_2$$

则式(10) 变为

$$\dot{V} \leq \tilde{z}_2^T [(A_{22} + LA_{12})^T P_3 + P_3(A_{22} + LA_{12}) + \gamma^2 P_3 LL^T + \gamma^2 P_3 P_3 + I_{n-p}] \tilde{z}_2$$

由式(6) 知  $\dot{V} < 0$ , 这表明  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ , 即式(7) 是系统(1) 的降维观测器。

不是必须的, 即当且仅当  $(A \quad C)$  是可观测的, 同样存在与定理 1 类似的结论。由于其过程类似, 相关过程在此从略。

### 3 实例仿真及其分析

由上节的讨论可知, 降维观测器设计的关键是求解代数 Riccati 方程的解, 式(5)也表明了这一点。代数 Riccati 方程的解通常可用 MATLAB 中的函数 ARE 较为方便地解出。本节通过对一个实际模型的仿真, 以验证所提出的降维观测器设计方法的正确性和实用性。

试验表明一大类机器人, 若不考虑由传输所引起的关节柔性, 其性能就会受到限制; 若不考虑由低频共振所产生的关节柔性, 则将限制机器人的性能范围。考虑到这些因素, 最近机器人技术已着重考虑柔性关节的控制问题。对单连杆柔性关节机器人而言, 状态的选取包括关节位置及其速度, 连杆位置及其速度。考虑到物理上的因素, 电动机的位置及其速度很容易测出, 但对其它状态的测量却不是一件易事。本节用所提出的降维观测器对该控制对象进行状态估计, 以电动机的位置及其速率为输入, 估计出连杆的位置及其速率。

该控制对象的一个状态空间描述如下<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_n &= \omega_n \\ \dot{\omega}_n &= \frac{k}{J_m}(\theta_1 - \theta_n) - \frac{B}{J_m}\omega_n + \frac{k_r}{J_m}u \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{k}{J_1}(\theta_1 - \theta_n) - \frac{mgh}{J_1}\sin(\theta) \end{aligned}$$

其中,  $J_m$  表示 DC 电动机调节器的惯性,  $J_1$  表示可控连杆的惯性,  $\theta_n$  和  $\theta$  分别表示电动机的旋转角和连杆的旋转角,  $\omega_n$  和  $\omega$  分别表示电动机的角速度和连

杆的角速度。一般说, 作为时间的函数, 由于扭转的变形, 它们之间会产生一些差别。表 1 列出了用于仿真的模型参数。

经过参数选定, 系统模型可描述如下

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x) + g(y)u \\ y = Cx \end{cases}$$

其中  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (\theta_n \ \omega_n \ \theta \ \omega)^T$  为系统状态, 而

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.26 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1.95 & 0 & -1.95 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = (0 \ 21.6 \ 0 \ 0)^T$$

$$f(x) = (0 \ 0 \ 0 \ -0.333\sin(x_1))^T$$

在本例中

$$\Phi(x, u) = gu(t) + f(x), \quad Y = 0.333$$

对该 Lipschitz 常数, 存在  $\epsilon = 0.25$  以及

$$K = \begin{bmatrix} 4.5811 & -46.3459 & 0.1740 & 1.4945 \\ 0.9402 & 10.4806 & 2.4002 & 0.2167 \end{bmatrix}^T$$

使得 Riccati 方程(3)具有如下正定解

$$P = \begin{bmatrix} 0.1711 & 0.0062 & -0.1354 & 0.3101 \\ 0.0062 & 0.0596 & -0.0238 & -0.0749 \\ -0.1354 & -0.0238 & 1.3991 & -0.2146 \\ 0.3101 & -0.0749 & -0.2146 & 5.2242 \end{bmatrix}$$

于是由式(5)可计算出

$$L = \begin{bmatrix} -0.0880 & -0.0193 \\ 0.0557 & -0.0151 \end{bmatrix}$$

图 1 和图 2 给出了仿真结果。仿真输入为  $\sin t$ , 初始状态定为  $x(0) = (1 \ 2 \ 1 \ 0)^T, x(0) = (1 \ 2 \ 0 \ 0.5)^T$ 。从仿真曲线可以看出状态跟踪效果是令人满意的。

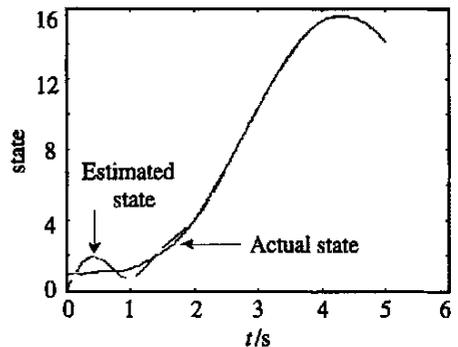


图 1 状态  $x_3$ (或  $\theta$ ) 仿真结果

表 1 模型参数值

系统参数 / 单位	数	值
电动机惯性 $J_m / \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$3.7 \times 10^{-3}$	
连杆惯性 $J_1 / \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$9.3 \times 10^{-3}$	
指示器质量 $m / \text{kg}$	$2.1 \times 10^{-3}$	
连杆长度 $2b / \text{m}$	$3.0 \times 10^{-3}$	
弹簧弹性系数 $k / (\text{N} \cdot \text{m} / \text{rad})$	$1.8 \times 10^{-3}$	
粘性摩擦系数 $B / (\text{N} \cdot \text{m} / \text{V})$	$4.6 \times 10^{-3}$	
放大器增益 $K_r / (\text{N} \cdot \text{m} / \text{V})$	$8.0 \times 10^{-3}$	

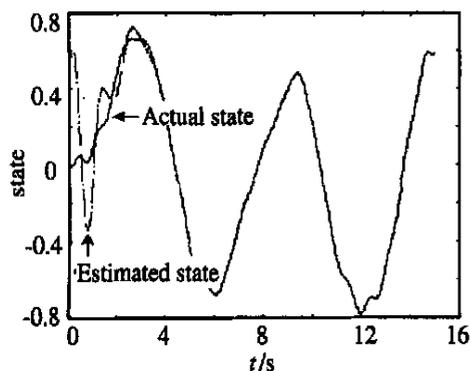


图 2 状态  $x_4$  (或  $\omega_1$ ) 仿真结果

## 4 结 论

本文讨论了 Lipschitz 非线性系统降维观测器的设计方法。在一个与 Lipschitz 常数有关的代数 Riccati 方程有解的前提下,给出了一种降维观测器设计方法,主要结论由第 2 节的定理 1 给出。为检验该降维观测器的实用性,我们相对于一实际模型进行仿真分析,仿真结果表明,本文所给出的方法其状态观测效果较为满意。

### 参考文献(References):

[1] Eykhoff P. *System Identification*[M]. New York: Wiley, 1974.  
 [2] Gelb A. *Applied Optimal Estimation*[M]. Cambridge: MIT Press, 1974.  
 [3] Luenberger G G. Observing the state of a linear system [J]. *IEEE Trans on Milit Electr*, 1964, 8: 74-80.  
 [4] La Scala B F, Bitmead R R, Matthew M R. Conditions for stability of the extended Kalman filter and their application to the frequency tracking problem[J].

*Math Contr Sign*, 1995, 8(1): 1-26.

- [5] Reif K, Unbehauen R. Linearization along trajectories and the extended Kalman filter[A]. *Proc 13th IFAC World Congress*[C]. 1996, H: 509-514.  
 [6] Reif K, Sonnemann F, Unbehauen R. An EKF-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability [J]. *Automatic*, 1998, 34(9): 1119-1123.  
 [7] Salvator L, Stasi S, Rardhioni L. A new EKF-based algorithm for flux estimation in induction machines[J]. *IEEE Trans on Ind Electr*, 1993, 40: 496-504.  
 [8] Zeit M. The extended Luenberger observer for nonlinear systems[J]. *Syst & Contr Lett*, 1987, 9(2): 149-156.  
 [9] Krener A J, Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers[J]. *Syst & Contr Lett*, 1983, 3(1): 47-52.  
 [10] Krener A J, Respondek W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics[J]. *SIMA J Contr Optim*, 1985, 23(2): 197-216.  
 [11] Xia X, Gao W. Nonlinear observer design by observer error linearization[J]. *DIAM J Optim*, 1989, 27(1): 199-216.  
 [12] Besancon G, Hammouri H. On uniform observation of nonuniformly observable systems [J]. *Syst & Contr Lett*, 1996, 29(1): 9-19.  
 [13] Rajamani R, Cho Y M. Existence and design of observers for nonlinear systems: Relation to distance to unobservability[J]. *Int J Control*, 1998, 69(5): 717-731.  
 [14] Rajamani R. Observer for Lipschitz nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1998, 43(3): 397-401.  
 [15] Raghavan S, Hedrick J K. Observer design for a class of nonlinear systems[J]. *Int J Control*, 1994, 59(2): 515-528.