

文章编号: 1001-0920(2002)04-0431-04

带有时滞摄动的线性切换系统的稳定性

孙洪飞¹, 赵 军¹, 高晓东²

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004; 2 辽宁省农机供应总公司, 辽宁 沈阳 110043)

摘 要: 研究一类带有时滞摄动的线性切换系统的稳定性, 分别利用单李亚普诺夫函数方法和多李亚普诺夫函数方法给出了使切换系统渐近稳定的条件和切换律的设计方法。仿真结果验证了所提出设计方法的有效性。

关键词: 切换系统; 时滞; 稳定性

中图分类号: TP 27 **文献标识码:** A

Stability of linear switched systems with delayed perturbations

SUN Hong-fei¹, ZHAO Jun¹, GAO Xiao-dong²

(1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2 Company of Farm Machines, Shenyang 110043, China)

Abstract: The stability problems of a class of linear switched systems with delayed perturbations are discussed. Two classes of switching laws are constructed by using single Lyapunov function technique and multiple Lyapunov function technique respectively. The simulation results show the effectiveness of the design method.

Key words: switched systems; delay; stability

1 引 言

在许多实际的工程系统中, 由于信息传输速度的限制、干扰的作用和元件老化等原因, 经常出现时滞现象。时滞的出现时常导致稳定的系统不能稳定工作, 同时也给系统的分析和设计带来了很大困难。因而, 在出现时滞后如何保证系统仍能稳定地工作, 便成为一个非常重要的问题。近年来, 这方面的研究工作已取得不少成果^[1~5]。

另一方面, 许多实际的工程系统, 如汽车转向系

统、计算机磁盘系统、机器人控制系统等, 只允许在有限个模型中进行切换, 以实现控制目的。我们称这类系统为切换系统。切换系统是混杂系统中的一类重要模型, 近几年受到普遍重视。

假设一个切换系统仅有有限个子系统供切换, 即使每个子系统均渐近稳定, 也可能存在一个切换律, 使得切换系统在此切换律下不能稳定; 反之, 即使每个子系统均不稳定, 也可能找到一个使切换系统稳定的切换律。与通常的连续系统或离散系统相比, 切换系统具有不少特性, 这些特性增加了对切换

收稿日期: 2001-04-02; 修回日期: 2001-07-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(79970114); 教育部骨干教师基金项目

作者简介: 孙洪飞(1970—), 男, 辽宁昌图人, 博士生, 从事复杂大系统、切换系统的研究; 赵军(1957—), 男, 辽宁海城人, 教授, 博士生导师, 从事复杂非线性系统、混杂系统等研究。

系统分析和设计的难度。

目前,切换系统的研究多集中于稳定性的分析和设计^[6-9],尚未见有关带有时滞的切换系统的研究报道。如何在有时滞影响的情况下,找到一个使系统渐近稳定的切换律,是本文所要研究的内容。我们分别利用单李亚普诺夫函数方法和多李亚普诺夫函数方法,给出两种切换律的设计方案。仿真结果验证了所提出设计方案的有效性。

2 引理与命题

考虑如下—类时滞系统^[1]

$$\dot{x}(t) = A x(t) + E(t)x(t - h(t)) \quad (1)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 为状态, $A \in R^{n \times n}$ 为稳定矩阵, $h(t)$ 是任一满足 $\dot{h}(t) = dh(t)/dt < 1$ 的有界时变函数, $E(t) \in R^{n \times n}$ 代表时滞摄动, 并且满足如下条件

$$E(t) \leq \eta \quad (2)$$

文献[1]给出了系统(1)渐近稳定的鲁棒稳定界:

定理 1^[1] 考虑系统(1), 如果下列条件成立

$$\eta < \eta_0(Q, \alpha) =$$

$$[1 - \dot{h}(t)]^{1/2} \lambda_{\min}^{1/2}[P^{-1}(2\alpha Q - \alpha^2 I_n)P^{-1}] \quad (3)$$

则系统(1)是渐近稳定的, 其中

$$0 < \alpha < 2\lambda_{\min}(Q) \quad (4)$$

$P > 0$ 是如下李亚普诺夫方程的解

$$A^T P + PA = -2Q, \quad Q > 0 \quad (5)$$

这一结果需要对矩阵 Q 及正标量 α 做出选择, 以实现鲁棒界 $\eta_0(Q, \alpha)$ 最大化。为了避开对 Q 及 α 的选择, 文献[2]就时滞函数 $h(t)$ 为常值 h 的情形, 给出了使系统(1)渐近稳定的结果:

命题 1^[2] 考虑系统(1), 假设条件(2)满足。如果下列矩阵不等式可解

$$I + A^T P + PA + \eta P P < 0, \quad P > 0 \quad (6)$$

则系统(1)是渐近稳定的。其中 I 为 n 阶单位阵。

文献[2]进一步指出, 若系统(1)满足条件(3)~(5), 则矩阵不等式(6)是可解的。

3 系统描述及问题提出

考虑如下—类切换系统

$$\dot{x}(t) = A \sigma(t) + E \sigma(t)x(t - h) \quad (7)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 为状态, $A \sigma \in R^{n \times n}$ 和 $E \sigma(t) \in R^{n \times n}$ 为时滞摄动矩阵, $h > 0$ 为时滞常数; $\sigma \in \{0, 1, \dots, m\}$ 为切换函数, 它是一个依赖于时间 t 或状态 $x(t)$ 的分段常值函数; $x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0], \phi(t)$ 为向量值连续函数。

显然, 系统(7)共有 m 个子系统, 即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + E_i(t)x(t - h) \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

本文并不要求某个矩阵 A_i 是稳定的, 但要求摄动矩阵 E_i 是有界的, 即存在 m 个正常数 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, 使其满足

$$E_i(t) \leq \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

条件(9)对应于条件(2)。

对于系统(7), 我们要解决的问题是: 设计切换律 $\sigma \in \{0, 1, \dots, m\}$, 使得切换系统(7)是渐近稳定的。

下面分别利用单李亚普诺夫函数方法和多李亚普诺夫函数方法, 给出此问题的两种解决方案。

4 切换律的设计

4.1 方案 1: 单李亚普诺夫函数方法

令 $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$, 用 $\mathcal{Y}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ 表示由参数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 所确定 A_1, A_2, \dots, A_m 的凸组合构成的矩阵束, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(A_1, A_2, \dots, A_m) = \\ \{ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m \\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0, 1], \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1 \} \end{aligned}$$

定理 2 若存在 $\bar{A} \in \mathcal{Y}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(A_1, A_2, \dots, A_m)$, 使得下列 Riccati 不等式有对称正定解 P

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + \eta P P + I < 0 \quad (10)$$

则存在切换函数 $\sigma(t) \in \{0, 1, \dots, m\}$, 使得系统(7)渐近稳定。

证明 仅就 $m = 2$ 的情形加以证明, $m > 2$ 的情形同理可证。

因为 $\bar{A} \in \mathcal{Y}_{\alpha_1, \alpha_2}(A_1, A_2)$, 所以 $\exists \alpha \in [0, 1]$, 使得 $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 1 - \alpha$, 并且

$$\bar{A} = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2 \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 得

$$\begin{aligned} \alpha[A_1^T P + P A_1] + (1 - \alpha) \times \\ [A_2^T P + P A_2] + \eta P P + I < 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \alpha[A_1^T P + P A_1 + \eta P P + I] + \\ (1 - \alpha)[A_2^T P + P A_2 + \eta P P + I] < 0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \alpha x^T [A_1^T P + P A_1 + \eta P P + I] x + \\ (1 - \alpha) x^T [A_2^T P + P A_2 + \eta P P + I] x < 0 \end{aligned}$$

$$\forall x \in R^n \setminus \{0\}$$

令

$$\Omega_1 = \{x \mid x^T [A_1^T P + PA_1 + \eta PP + I]x < 0\}$$

$$\Omega_2 = \{x \mid x^T [A_2^T P + PA_2 + \eta PP + I]x < 0\}$$

则 $R^n \setminus \{0\} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 。选择李亚普诺夫函数

$$V(x(t)) = x^T P x + \int_{t-h}^t x^T(\theta) x(\theta) d\theta$$

设计切换律

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & x(t) \in \Omega_1 \\ 2, & x(t) \in \Omega_2 - \Omega_1 \end{cases} \quad (12)$$

若 $x(t) \in \Omega_1$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & x^T(t) [A_1^T P + PA_1]x(t) + x^T(t-h) E_1^T P x(t) + x^T(t) P E_1 x(t-h) + \\ & x^T(t)x(t) - x^T(t-h)x(t-h) = \\ & x^T(t) [I + A_1^T P + PA_1 + \eta PP]x(t) - \\ & x^T(t) P (\eta I - E_1 E_1^T) P x(t) - [E_1^T P x(t) - \\ & x(t-h)]^T [E_1^T P x(t) - x(t-h)] < 0 \end{aligned}$$

同理, 当 $x(t) \in \Omega_2 - \Omega_1$ 时, 有 $\dot{V}(x(t)) < 0$ 。

综上, 在切换律(12)下, 沿系统(7)的轨线恒有 $\dot{V} < 0$, 因此系统(7)渐近稳定。

注 1 若 $\alpha = 0$ 或 1 , 即两个时滞子系统中至少有一个是渐近稳定的, 则 $\sigma(1) = 1$ 或 $\sigma(t) = 2$ 。此时切换信号固定在稳定的子系统上, 即不进行切换, 定理 2 退化为命题 1。因而, 定理 2 可看成命题 1 的推广。定理 2 的意义在于, 当每个时滞子系统都不稳定时, 可适当选择切换律来保证时滞切换系统渐近稳定。

4.2 方案 2: 多李亚普诺夫函数方法

这里假定 $m = 2$, $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$, 切换系统(7)是由下面两个子系统构成的。

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + E_i(t)x(t-h), \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

定理 3 若存在两个非负或非正实数 β_1 和 β_2 以及两个对称正定阵 P_1 和 P_2 , 使得下面两个不等式成立

$$-PA_1 - A_1^T P_1 - \eta P_1 P_1 - I + \beta_1(P_2 - P_1) > 0 \quad (14)$$

$$-PA_2 - A_2^T P_2 - \eta P_2 P_2 - I + \beta_2(P_1 - P_2) > 0 \quad (15)$$

则存在切换函数 $\sigma(t) \in \{1, 2\}$, 使得由式(13)构成的切换系统(7)渐近稳定。

证明 不妨设 β_1 和 β_2 非负, 并令

$$V_i(x(t)) = x^T P_i x + \int_{t-h}^t x^T(\theta) x(\theta) d\theta$$

$$\sigma(t) = \arg \max\{V_i(x(t)), i = 1, 2\}$$

由文献[10]的 S-Procedure 知, 式(14)和(15)同时成立可得以下结论:

当 $x^T(P_1 - P_2)x = 0$ 且 $x = 0$ 时, 有

$$x^T [A_1^T P_1 + PA_1 + \eta P_1 P_1 + I]x < 0$$

当 $x^T(P_2 - P_1)x = 0$ 且 $x = 0$ 时, 有

$$x^T [A_2^T P_2 + PA_2 + \eta P_2 P_2 + I]x < 0$$

令

$$\Omega_1 = \{x \in R^n \mid x^T(P_1 - P_2)x = 0, x = 0\}$$

$$\Omega_2 = \{x \in R^n \mid x^T(P_2 - P_1)x = 0, x = 0\}$$

则 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = R^n \setminus \{0\}$ 。考虑系统(13), 当 $x \in \Omega_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x(t)) = & x^T [I + A_1^T P_1 + PA_1 + \eta P_1 P_1]x - \\ & x^T(t) P_1 (\eta I - E_1 E_1^T) P_1 x(t) - \\ & [E_1^T P_1 x(t) - x(t-h)]^T \times \\ & [E_1^T P_1 x(t) - x(t-h)] < 0 \end{aligned}$$

同理可证, 当 $x \in \Omega_2 - \Omega_1$ 时, $\dot{V}_2(x(t)) < 0$ 。

另一方面, 由切换律的设计可知, 在切换时刻 t_j , 有

$$V_{\sigma(t_j)}(x(t_j)) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} V_{\sigma(t)}(x(t))$$

由多李亚普诺夫函数技术^[6]知, 系统(7)是渐近稳定的。

当 β_1 和 β_2 非正时, 令

$$\sigma(t) = \arg \min\{V_i(x(t)), i = 1, 2\}$$

可得同样结论。综上可知定理 3 成立。

注 2 若 β_1 或 β_2 有一个为 0, 则式(12)中两个子系统至少有一个是渐近稳定的, 因此 $\sigma(t) = 1$ 或 $\sigma(t) = 2$ 。此时切换信号固定在稳定的子系统上, 即不进行切换。定理 3 仅就 $m = 2$ 的情形研究了切换律的设计, 当 $m > 2$ 时, 情况将很复杂, 需要进一步探讨。另外, 定理 2 和定理 3 从不同角度研究了同一个系统切换律的设计, 二者互不包含。

5 仿真例子

考虑如下例子

$$\dot{x}(t) = A_1 x + E_1 x(t-0.5) \quad (16)$$

$$\dot{x}(t) = A_2 x + E_2 x(t-0.5) \quad (17)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & -5.5 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

则 $\eta = 1$ 。对于系统(16)和(17),若初始点均取在 $x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,且当 $t \in [-0.5, 0]$ 时, $x(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,则这两个系统均不稳定。但若采取设计方案1,当 $\alpha = \alpha = 0.5$ 时,不等式(10)有对称正定解

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.45 \\ 0.45 & 1 \end{bmatrix}$$

从而

$$\Omega_1 = \{ (x_1, x_2) \mid -7.7975x_1^2 - 2.8x_1x_2 + 3.7525x_2^2 < 0 \}$$

$$\Omega_2 = \{ (x_1, x_2) \mid 2.3025x_1^2 - 4.7x_1x_2 - 8.7975x_2^2 < 0 \}$$

且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = R^2 \setminus \{0\}$ 。

系统的切换域如图1所示。

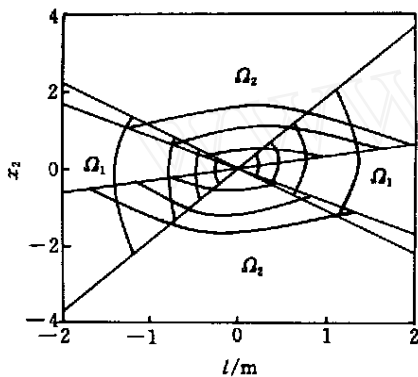


图1 系统切换域

由式(16)和(17)构成的切换系统是渐近稳定的,如图2所示。

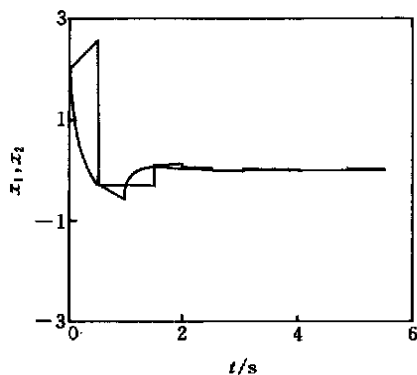


图2 切换系统的状态响应

6 结 语

本文研究带有时滞影响的线性切换系统的稳定性,分别利用单李亚普诺夫函数和多李亚普诺夫函数方法给出了渐近稳定的切换律的两种设计方案。所得结果均以线性矩阵不等式的形式给出,便于工程上实现。由于本文把时滞当作干扰来对待,因此并没有涉及在切换时刻时滞对系统动态行为的影响。这也是今后需要研究的问题。

参考文献(References):

- [1] Jin Hoon Kim. Robust stability of linear systems with delayed perturbations[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1996, 41(12): 1820-1822
- [2] Tatsushi Ooba, Yasuyuki Funahashi. Comments on "Robust stability of linear systems with delayed perturbations"[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1999, 44(8): 1582-1583
- [3] K K Shyu, J J Yan. Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structured control[J]. *Int J Control*, 1993, 57(1): 237-246
- [4] H Trinh, M A Idean. On the stability of linear systems with delayed perturbations[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1994, 39(12): 1948-1951
- [5] H Wu, K Mizukami. Robust stability criteria for dynamical systems including delayed perturbations[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1995, 40(3): 487-490
- [6] P Peleties, R A DeCarlo. A asymptotic stability of m -switched systems using Lyapunov-like functions[A]. *Proc American Control Conf [C]*. Boston, 1991. 1679-1684
- [7] L Hou, A N Michel, H Ye. Stability analysis of switched systems[A]. *Proc 35th Conf on Decision & Control [C]*. Kobe, 1996. 1208-1212
- [8] T Ooba, Y Funahashi. On a common quadratic Lyapunov function for widely distant systems[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1997, 42(12): 1697-1699
- [9] Daniel Liberzon, Stephen Morse A. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. *IEEE Contr Syst Magaz*, 1999, 19(1): 59-70
- [10] S Boyd, L E Ghaoui, E Feron, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994