

文章编号: 1001-0920(2002)04-0435-04

基于方案达成度和综合度的交互式多属性决策法

徐泽水

(东南大学 经济管理学院, 江苏 南京 210096)

摘 要: 定义了方案达成度和方案综合度, 对于属性权重信息不能完全确知且对方案有偏好的多属性决策问题, 提出一种基于方案达成度和综合度的交互式决策方法。该方法既能充分利用已知的客观信息, 又能最大限度地发挥决策者的主观能动性, 并通过对方案达成度和综合度的给定和修正来实现人机交互决策。应用实例说明了该方法的有效性和实用性。

关键词: 多属性决策; 方案达成度; 方案综合度

中图分类号: C 934 **文献标识码:** A

Interactive method based on alternative achievement scale and alternative comprehensive scale for multi-attribute decision making problems

XU Ze-shui

(College of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: The definitions of alternative achievement scale and alternative comprehensive scale are presented, and an interactive method based on them for multi-attribute decision making problems is proposed. The method makes use of the subjective information provided by a decision maker and the objective information to form single-objective programming models. The process of interactive decision making can be realized by giving and revising the alternative achievement scale and the alternative comprehensive scale. An illustrative example is given to verify the developed approach and to demonstrate its feasibility and practicality.

Key words: multi-attribute decision making; alternative achievement scale; alternative comprehensive scale

1 引 言

多属性决策是现代决策科学的重要组成部分, 它在工程设计、经济、管理和军事等诸多领域具有广泛的实际背景。目前, 关于属性权重信息完全确知的多属性决策的理论与方法已较为完善^[1-3]; 对于属

性权重信息完全未知或只有部分权重信息的多属性决策问题, 也取得了一些研究成果^[4-10]。属性权重信息不能完全确知的不确定多属性决策问题的突出特点是: 属性权重信息的不完全性将引起决策方案择优的不确定性, 因此, 仅凭已有的客观信息进行决策往往会导致决策的错误。现有的决策方法普遍存

收稿日期: 2001-05-08; 修回日期: 2001-08-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(79970093); 东南大学-南瑞继保公司学位论文基金项目

作者简介: 徐泽水(1968—), 男, 安徽南陵人, 副教授, 博士生, 从事决策分析、运筹学等研究。

在着这方面的缺陷。

本文将多目标决策领域中的交互式决策思想^[11]引入多属性决策领域,为解决这类问题提供了一条新途径;在属性权重信息不能完全确知的情况下,提出一种基于方案达成度和综合度的交互式决策方法。该方法既能充分利用已知的客观信息,又能最大限度地考虑决策者的交互要求,发挥决策者的主观能动性。通过对方案达成度和综合度的给定和修正来实现人机交互决策,使决策方案在总体上达到决策者的要求,并使各方案尽可能达到自己的良好状态,从而使决策更具合理性。

2 预备知识

设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为多属性决策问题的方案集, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ 为属性集, $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ 为属性的权重向量。其中, $w_i \geq 0, \sum_{i=1}^m w_i = 1; w \in H, H$ 为已知的部分权重信息确定的属性可能权重集合。对于方案 $x_j \in X$, 按第 i 个属性 u_i 进行测度, 可得到 x_j 关于 u_i 的属性值 a_{ij} , 从而构成决策矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 。令 $M = \{1, 2, \dots, m\}, N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。属性类型一般有效益型、成本型、固定型、区间型、偏离型、偏离区间型等。为了消除不同物理量纲对决策结果的影响, 决策时需要将决策矩阵进行规范化处理^[12]。假设决策矩阵 A 经规范化处理后, 得到规范化矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times n}$, 则方案 x_j 的综合属性值为

$$z_j(w) = \sum_{i=1}^m r_{ij} w_i, \quad j \in N \quad (1)$$

当属性权重 $w_i (i \in M)$ 为确定数值时, 由各方案综合属性值的大小可以确定方案的优劣。若 $w_i (i \in M)$ 是未知的, 则不能直接由式(1)确定综合属性值。本文研究属性权重不能完全确知的情形。

多属性决策实质上是对方案综合属性值的排序比较。由于属性权重的不确定性将导致方案综合属性值的不确定性, 因此属性权重的不同取值会产生不同的方案排序。在此情况下, 决策者的积极参与并在决策过程中发挥自己的主观能动性, 将对合理性决策发挥重要作用。

3 定义、定理及算法

对于给定的 $w \in H$, 方案综合属性值 $z_j(w) (j \in N)$ 总是越大越好。考虑如下多目标决策问题

$$\text{(MOP): } \max z(w) = (z_1(w), z_2(w), \dots, z_n(w)) \\ \text{s.t. } w \in H$$

定义 1 若不存在 $w \in H$, 使得 $z_j(w) < z_j(w^0), j \in N, w^0 \in H$, 并且至少有一严格不等式成立, 则称 w^0 为问题(MOP)的有效解。

定义 2 若 $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ 是下列单目标优化模型的最优解

$$\text{(SOP1): } \min z_j(w) = \sum_{i=1}^m r_{ij} w_i, \quad j \in N \\ \text{s.t. } w \in H$$

则称 $z_j^{\min} = \sum_{i=1}^m r_{ij} w_i$ 为方案 $x_j (j \in N)$ 的综合属性最小值。

定义 3 决策者所希望达到的方案 x_j 综合属性值 $z_j(w)$ 的水平值 \bar{z}_j 称为方案 x_j 的期望水平。

定义 4 若

$$\mu(z_j(w)) = \frac{z_j(w) - z_j^{\min}}{\bar{z}_j - z_j^{\min}}, \quad j \in N \quad (2)$$

则称 $\mu(z_j(w))$ 为方案 x_j 的达成度。

函数 $\mu(z_j(w))$ 具有下述特点:

1) 方案达成度是在以方案综合属性最小值为参考点的前提下, 所达到的方案综合属性值与期望水平的百分比。方案综合属性值 $z_j(w)$ 离最小值越远, 方案 x_j 的达成度越高; 反之, 方案 x_j 的达成度越低。

2) 对于 $w^1, w^2 \in H$, 若 $z_j(w^1) > z_j(w^2)$, 则 $\mu(z_j(w^1)) > \mu(z_j(w^2))$, 即 $\mu(z_j(w))$ 是关于 $z_j(w)$ 的严格单调递增函数。

定义 5 若 $c(w) = \sum_{j=1}^n (z_j(w) - z_j^{\min})$, 则称 $c(w)$ 为方案综合度。

方案达成度反映的是各方案的达成情况, 而方案综合度则反映了方案总属性值的大小。综合考虑这两方面因素, 便可在交互决策过程中实现决策方案在总体上达到决策者要求, 并使各方案尽可能达到自己的良好状态, 从而得到合理的方案排序。具体思想如下: 初始时, 可建立单目标优化模型

$$\text{(SOP2): } \max c(w) \\ \text{s.t. } w \in H$$

求解该模型, 得到最优解 w^* 、各方案的综合属性值 $z_j(w^*)$ 和方案综合度 $c(w^*)$, 并求出各方案的达成度 $\mu(z_j(w^*)) (j \in N)$ 。决策者据此提出初始各方案的达成度 $\lambda_j^0 (j \in N)$ 以及方案综合度的低限值 c_0 。

定理 1 单目标优化问题(SOP2)的最优解为

多目标优化问题(MOP)的有效解。

证明略。

方案综合度指标值越好,则方案在总体上越能满足决策者的要求。但是这有可能使某些方案的达成度偏低,从而远离自己的良好状态;另一方面,如果仅运用方案达成度,则它不可能有效地实现不同方案之间的平衡;并且各个方案之间是公平竞争的。我们综合这些因素,建立下列单目标决策模型

$$(SOP3): \max J = \sum_{j=1}^n \lambda_j, \quad j = 1, \dots, N$$

$$s.t. \quad c(w) \geq c_0$$

$$\mu(z_j(w)) \geq \lambda_j, \quad \lambda_j \in \Lambda_j^0$$

$$w \in H$$

求解模型(SOP3),若无解,则决策者需重新设定初始各方案达成度及方案综合度的低限值;若有最优解,则易证下列定理成立:

定理 2 单目标优化问题(SOP3)的最优解是多目标优化问题(MOP)的有效解。

定理 1 和定理 2 保证了单目标决策模型(SOP2)和(SOP3)的最优解是原多目标决策模型(MOP)的有效解。若决策人对由模型(SOP3)所得到的结果感到满意,则可计算出各方案的综合属性值,并按其值的大小对方案进行排序,从而得到决策者的满意方案;否则,决策者可适当提高某些方案的最低达成度,同时降低另一些方案的最低达成度,若有必要可对方案综合度的低限值也进行适当调整,再重新求解模型(SOP3),直至决策者对所得结果感到满意为止。

依据上述定理和模型,我们给出一种基于方案综合度和方案达成度的交互式多属性决策方法:

1) 由决策问题构造决策矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 并用适当方法把矩阵 A 规范化为决策矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times n_0}$

2) 利用模型(SOP1) 求出方案 x_j 的综合属性最小值 z_j^{min} , 并由决策者提出各方案的期望水平值 $\bar{z}_j(j = 1, \dots, N)$ 。

3) 求解单目标优化问题(SOP2), 得到最优解 w^0 , 各方案的综合属性值 $z_j(w^0)$ 以及方案综合度 $c(w^0)$, 并求出各方案的达成度 $\mu(z_j(w^0))(j = 1, \dots, N)$ 。决策者据此提出初始的各方案达成度 $\lambda_j^0(j = 1, \dots, N)$ 以及方案综合度的低限值 c_0 , 置 $k = 1$ 。

4) 求解单目标决策模型(SOP3), 得到最优解 w^k , 方案综合度 $c(w^k)$, 方案达成度向量 λ^k 以及相应的方案综合属性值向量 $z(w^k)$ 。

5) 如果决策者认为上述结果已经符合要求,则不再提出新的要求,并转 6); 否则,决策者应根据需要适当提高某些方案的最低达成度,同时降低另一些方案的最低达成度,若有必要可对方案综合度的低限值也进行适当调整。置 $k = k + 1$, 转 4)。

6) 按各方案的综合属性值的大小对方案进行排序,得到决策者的满意方案。

7) 结束。

4 算 例

为开发新产品,拟定了 5 个投资方案 $x_j(j = 1, 2, \dots, 5)$, 各方案的属性值列于表 1。

表 1 各个方案的属性值

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
投资额 u_1	5.20	10.08	5.25	9.72	6.60
期望净现值 u_2	5.20	6.70	4.20	5.25	3.75
风险盈利值 u_3	4.73	5.71	3.82	5.54	3.30
风险损失值 u_4	0.473	1.599	0.473	1.313	0.803

在属性集中,期望净现值 u_2 和风险盈利值 u_3 为效益型属性,投资额 u_1 和风险损失值 u_4 为成本型属性,属性 u_i 的权重 $w_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 不能完全确定。已知的部分权重信息为: $H = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T \mid 0.3 \leq w_1 \leq 0.45, 0.15 \leq w_2 \leq 0.1, w_3 \geq 0.35, w_4 \geq 0.03; w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1, w_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4\}$ 。试对方案进行择优。

利用本文方法对方案进行排序,具体步骤如下:

1) 由表 1 中的数据建立决策矩阵 $A = (a_{ij})_{4 \times 5}$, 并利用下式将 A 规范化。

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{\max_j a_{ij}}, & i \in T_1, \\ \frac{\min_j a_{ij}}{a_{ij}}, & i \in T_2, \end{cases} \quad j = 1, \dots, N$$

其中, T_1 和 T_2 分别表示效益型和成本型的下标集合。于是得到规范化矩阵

$$R = (r_{ij})_{4 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0.516 & 0.990 & 0.535 & 0.788 \\ 0.776 & 1 & 0.627 & 0.784 & 0.560 \\ 0.828 & 1 & 0.669 & 0.970 & 0.578 \\ 1 & 0.296 & 1 & 0.360 & 0.589 \end{bmatrix}$$

2) 由模型(SOP1) 求得方案综合属性最小值为: $z_1^{min} = 0.906, z_2^{min} = 0.432, z_3^{min} = 0.824, z_4^{min} = 0.474, z_5^{min} = 0.64$; 决策者提出各方案期望水平: $\bar{z}_1 =$

$= 0.97, \bar{z}_2 = 0.65, \bar{z}_3 = 0.90, \bar{z}_4 = 0.55, \bar{z}_5 = 0.75,$

3) 根据模型(SOP2), 可得到最优解 $w^0 = (0.45, 0.15, 0.35, 0.05)^T$, 各方案的综合属性值 $z_1(w^0) = 0.906, z_2(w^0) = 0.747, z_3(w^0) = 0.824, z_4(w^0) = 0.716, z_5(w^0) = 0.670$, 以及方案综合度 $c(w^0) = 0.586$, 并求出各方案的达成度 $\mu(z_1(w^0)) = 0, \mu(z_2(w^0)) = 1.445, \mu(z_3(w^0)) = 0, \mu(z_4(w^0)) = 3.184, \mu(z_5(w^0)) = 0.266$. 决策者据此提出初始的各方案达成度: $\lambda_1^0 = 0.50, \lambda_2^0 = 0.90, \lambda_3^0 = 0.50, \lambda_4^0 = 2.00, \lambda_5^0 = 0.30$, 以及方案综合度的低限值 $c_0 = 0.50$.

4) 根据单目标决策模型(SOP3), 可得最优解 $w^1 = (0.45, 0, 0.35, 0.20)^T$, 各方案的综合属性值: $z_1(w^1) = 0.940, z_2(w^1) = 0.641, z_3(w^1) = 0.880, z_4(w^1) = 0.652, z_5(w^1) = 0.675$, 以及方案综合度 $c(w^1) = 0.51$, 并求出各方案的达成度: $\mu(z_1(w^1)) = 0.530, \mu(z_2(w^1)) = 0.959, \mu(z_3(w^1)) = 0.737, \mu(z_4(w^1)) = 2.342, \mu(z_5(w^1)) = 0.312$. 决策者对此感到满意, 因此按 $z_j(w^1) (j = 1, 2, \dots, 5)$ 的大小对方案进行排序: $x_1 > x_3 > x_5 > x_4 > x_2$, 故最优方案为 x_1 .

5 结 语

针对属性权重信息不能完全确知且对方案有偏好的多属性决策问题, 本文提出一种基于方案达成度和综合度的交互式决策方法. 该方法既能充分利用已知的客观信息, 又能最大限度地考虑决策者的交互要求, 发挥决策者的主观能动性, 使决策者保持了在决策过程中的主导性. 通过对方案达成度和综合度的给定和修正来实现人机交互决策, 使决策方案在总体上达到决策者的要求, 并使各方案尽可能达到自己的良好状态, 且直观有效, 易于在计算机上实现.

参考文献(References):

- [1] Hwang C L., Yoon K S. *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications* [M]. Berlin: Springer, 1981.
- [2] 陈挺. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [3] 徐南荣, 仲伟俊. 科学决策理论与方法[M]. 南京: 东南大学出版社, 1996.
- [4] 王应明. 应用离差最大化方法进行多指标决策与排序[J]. 系统工程与电子技术, 1998, 20(7): 24-26.

(Wang Yingming. Using the method of maximizing deviations to make decision for multi-indices[J]. *Syst Eng & Electr*, 1998, 20(7): 24-26.)

- [5] 王应明, 傅国伟. 运用无限方案多目标决策方法进行有限方案多目标决策[J]. 控制与决策, 1993, 8(1): 25-29.
(Wang Yingming, Fu Guowei. Using multiobjective decision making method to make decision for multi-attributes[J]. *Control & Decision*, 1993, 8(1): 25-29.)
- [6] 王文平. 不完全信息下的多目标优化方法研究[J]. 系统工程学报, 1996, 11(2): 1-6.
(Wang Wenping. Study on multi-objective optimal method under incomplete information [J]. *J of Syst Eng*, 1996, 11(2): 1-6.)
- [7] Xu Zeshui. Research on method for priorities of fuzzy synthetic evaluations[A]. *Syst Eng, Syst Sci & Complexity Research*[C]. United Kingdom: Res Infor Ltd, 2000: 507-511.
- [8] 徐泽水. 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2001, 16(增刊): 818-821.
(Xu Zeshui. Maximum deviation method based on deviation degree and possibility degree for uncertain multi-attribute decision making[J]. *Control & Decision*, 2001, 16(S): 818-821.)
- [9] 徐泽水, 孙在东. 一种基于方案满意度的不确定多属性决策方法[J]. 系统工程, 2001, 19(3): 76-79.
(Xu Zeshui, Sun Zaidong. A method based on satisfactory degree of alternative for uncertain multi-attribute decision making[J]. *Syst Eng*, 2001, 19(3): 76-79.)
- [10] 樊治平, 张全, 马建. 多属性决策中权重确定的一种集成方法[J]. 管理科学学报, 1998, 1(3): 50-53.
(Fan Zhiping, Zhang Quan, Ma Jian. An integrated approach to determining weights in multiple attribute decision making[J]. *J of Manag Sci in China*, 1998, 1(3): 50-53.)
- [11] 蒋尚华, 徐南荣. 基于目标达成度和目标综合度的交互式多目标决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(1): 9-14.
(Jiang Shanghua, Xu Nanrong. Interactive multi-objective decision making method based on objective achievement scale and objective comprehensive scale [J]. *Syst Eng — Theory & Practice*, 1999, 19(1): 9-14.)
- [12] 刘树林, 邱苑华. 多属性决策基础理论研究[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(1): 38-43.
(Liu Shulin, Qiu Yuanhua. Study on the basic theories for MADM [J]. *Syst Eng — Theory & Practice*, 1998, 18(1): 38-43.)