

文章编号: 1001-0920(2002)04-0457-04

## 延迟反馈引导混沌系统到周期解

蔡朝洪, 须文波, 徐振源, 李莲花  
(江南大学 信息与控制工程学院, 江苏 无锡 214036)

**摘 要:** 利用 Melnikov 方法严格分析了延迟反馈实现引导混沌系统到周期解的控制机理, 揭示出延迟时间与控制混沌的关系, 得到一些新的结论: 延迟反馈实际上是一作用明显的扰动项, 使得系统的稳定流形和不稳定流形不再横截相交; 延迟时间关系到扰动量的大小, 但不必是吸引子中不稳定周期轨道的周期整数倍。次谐轨道的 Melnikov 分析进一步证实了周期解的存在性。

**关键词:** 混沌; Melnikov 方法; 延迟时间; 周期解

**中图分类号:** TP 13      **文献标识码:** A

## Directing chaotic dynamics towards periodic motion by time-delayed feedback control

CAI Chao-hong, XU Wen-bo, XU Zhen-yuan, LI Lian-hua

(School of Information and Control Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214036, China)

**Abstract:** Melnikov's method is used to analyze the mechanism of time-delayed feedback control for chaotic motion in a typical perturbed planar Hamiltonian system. It is shown that the perturbation term yielded by time-delayed feedback control makes the stable manifolds and the unstable manifolds not intersect. The delayed time may not be an integer multiple of the period of the inherent unstable orbit in the chaotic attractor. Further Melnikov's analyses examine the existence of low-periodic subharmonic orbits in the controlled system.

**Key words:** chaos; Melnikov's method; delayed time; periodic orbits

### 1 引 言

混沌是由确定性非线性系统产生, 对于初值极为敏感, 具有内禀随机性和长期预测不可能性的往复非周期运动。Paragas 提出了延迟反馈法, 即利用简单的延迟反馈来镇定混沌吸引子中不稳定的周期轨道(UPO)<sup>[1]</sup>。延迟反馈法具有广泛的普适性, 适用于控制低维系统的混沌, 对高维系统和无穷维延迟微分动力系统产生的混沌仍然适用, 甚至可用于

控制时空混沌。

近年来, 部分学者利用线性理论解释了延迟反馈控制混沌的机理<sup>[2~4]</sup>, 但是这些分析普遍缺少严密性。人们普遍认为, 在延迟反馈控制混沌中, 延迟时间  $\tau$  与 UPO 的周期紧密相关。Chen 将延迟反馈应用于控制自治系统的混沌, 证明了“如果反馈增益矩阵非奇异, 则延迟时间  $\tau$  必须是 UPO 周期的整数倍”<sup>[4]</sup>。本文考虑更普遍的情况, 即在非自治系统中反馈增益矩阵奇异。我们用延迟反馈来引导一个典

收稿日期: 2001-06-06; 修回日期: 2001-11-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(19872044)

作者简介: 蔡朝洪(1977—), 男, 福建莆田人, 硕士生, 从事混沌控制等研究; 须文波(1946—), 男, 江苏无锡人, 教授, 博士生导师, 从事集散控制、最优控制等研究。

型的受扰的平面 Hamilton 系统——非线性扰动摆从混沌运动到低周期解,利用 Melnikov 方法分析了混沌产生和破坏的过程,揭示了延迟反馈实现控制混沌的本质,得到了与以往文献截然不同的结论。

## 2 利用 Melnikov 方法分析延迟反馈控制混沌的机制

### 2.1 延迟反馈控制扰动摆方程

考虑如下扰动摆方程<sup>[5]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x + \epsilon(-\mu x + \mu b + a \sin \omega t) \end{cases} \quad (1)$$

当  $\epsilon = 0.1, \mu = 0.3, b = 3, \omega = 1, a = 2.5$  时,该扰动摆存在混沌运动。方程(1)的未扰系统( $\epsilon = 0$ )实际上与 Josephson 结的未扰系统是一致的<sup>[6]</sup>。若仅对系统(1)的第2式施加延迟反馈,则受控后的扰动摆方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x + \epsilon(-\mu x + \mu b + a \sin \omega t) + \epsilon P(y(t-\tau) - y(t)) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\epsilon P$  为反馈增益,  $\tau$  为延迟时间。与文献[4]相比,本文的反馈增益矩阵是奇异的。

当  $\epsilon = 0$  时,式(2)为一 Hamilton 系统,其 Hamilton 量为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x = h \quad (3)$$

所对应的系统为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x \quad (4)$$

式(2)定义在  $S^1 \times R$  的柱面上,其中心点为  $(0, 0)$ , 并有  $p_1 = (-\pi, 0)$  和  $p_2 = (\pi, 0)$  粘合而成的双曲鞍点。当  $h = 1$  时,存在两条联结双曲鞍点的同宿轨道  $\Gamma_{\pm}^0$ ; 当  $h < 1$  时,存在一簇围绕  $(0, 0)$ , 且位于  $\Gamma_{\pm}^0$  内的振动型(O型)周期轨道  $\Gamma^i(k)$ ; 当  $h > 1$  时,存在两簇包围柱面的旋转型(R型)周期轨道  $\Gamma^l_{\pm}(k)$ 。上述各类轨道的参数方程分别为:

1) 同宿轨道  $\Gamma_{\pm}^0$

$$\begin{cases} x_{\pm}^0(t) = \pm 2 \arcsin(\operatorname{th} t) \\ y_{\pm}^0(t) = \pm 2 \operatorname{sech} t \end{cases} \quad (5)$$

2) 振动型周期轨道  $\Gamma^i(k)$

$$\begin{cases} x^i(t, k) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn} t) \\ y^i(t, k) = 2k \operatorname{cn} t \end{cases} \quad (6)$$

此时  $h_{\pm}^i(k) = H(\Gamma^i(k)) = 2k^2 - 1 < 1$ , 对应的周期为  $T^i(k) = 4K(k)$ 。

3) 旋转型周期轨道  $\Gamma^l_{\pm}(k)$

$$\begin{cases} x^l_{\pm}(t, k) = \pm 2 \arcsin(\operatorname{sn} \frac{t}{k}) \\ y^l_{\pm}(t, k) = \pm \frac{2}{k} \operatorname{dn}(\frac{t}{k}) \end{cases} \quad (7)$$

此时  $h_{\pm}^l(k) = H(\Gamma^l_{\pm}(k)) = 2/k^2 - 1 > 1$ , 对应的周期为  $T^l(k) = 2kK(k)$ 。其中,  $\operatorname{sn} u, \operatorname{dn} u, \operatorname{cn} u$  为雅可比椭圆函数,  $k(0 < k < 1)$  为椭圆函数的模,  $K(k)$  为第1类完全椭圆积分。

### 2.2 用 Melnikov 方法分析混沌的产生与破坏

现用 Melnikov 方法详细解析系统(2)实现延迟反馈控制混沌的机理。首先分析 Smale 马蹄的产生与破坏。对于  $\Gamma_{\pm}^0$ , 其 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_{\pm}^0(t_0) = & \int_{t_0}^{t_0+\tau} y_{\pm}^0(t) [-\mu x_{\pm}^0(t) + \mu b + a \sin(t + \\ & t_0) + P y_{\pm}^0(t - \tau) - P y_{\pm}^0(t)] dt = \\ & 2\pi\mu b + 2\pi a \operatorname{sech} \frac{\pi}{2} \omega \sin \omega t_0 + P \Psi(\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\Psi(\tau) = -8 - \frac{4}{\sinh \tau} \ln \frac{\cosh \tau - \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}$$

$\Psi(\tau)$  的曲线如图1所示。

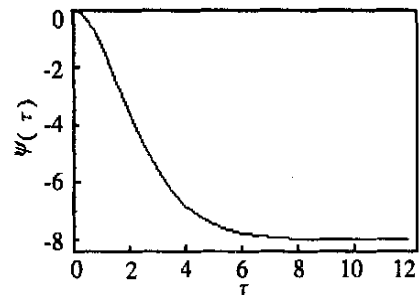


图1  $\Psi(\tau)$  曲线

如果

$$|2\pi\mu b + P \Psi(\tau)| < 2\pi a \operatorname{sech} \frac{\pi}{2} \omega \quad (9)$$

则系统(2)的庞加莱映射在不动点  $p_1$  的不稳定流形与不动点  $p_2$  的稳定流形将横截相交。

对于  $\Gamma^0$ , 其 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M^0(t_0) = & \int_{t_0}^{t_0+\tau} y^0(t) [-\mu x^0(t) + \mu b + a \sin(t + \\ & t_0) + P y^0(t - \tau) - P y^0(t)] dt = \\ & -2\pi\mu b - 2\pi a \operatorname{sech} \frac{\pi}{2} \omega \sin \omega t_0 + P \Psi(\tau) \end{aligned} \quad (10)$$

如果

$$|-2\pi\mu b + P \Psi(\tau)| < 2\pi a \operatorname{sech} \frac{\pi}{2} \omega \quad (11)$$

则系统 (2) 的庞加莱映射在不动点  $p_1$  的稳定流形与不动点  $p_2$  的不稳定流形将横截相交。如果系统参数同时满足式 (9) 和 (11), 则系统将存在 Smale 马蹄变换意义下的混沌。

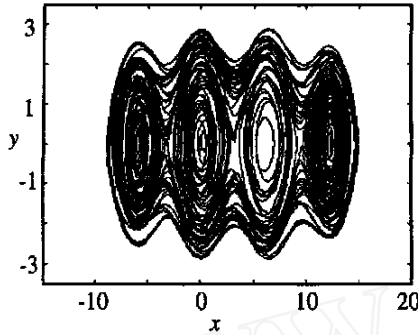


图 2 原系统的混沌吸引子

未加控制即  $\epsilon P = 0$  时, 原扰动摆的混沌吸引子如图 2 所示。由图 1 可知, 当  $\tau = 4$  时, 延迟反馈的作用是明显的, 小量的反馈增益即可获得较好的效果。当由式 (9) 和 (11) 算得  $P = 0.08$  时, 系统的混沌将被破坏。数值仿真中, 如果延迟时间取  $\tau = 4$ , 则反馈增益  $P = 0.05$ , 受控系统由混沌态快速转为周期态。系统进入稳态后出现稳定的周期 1 运动如图 3 所示。

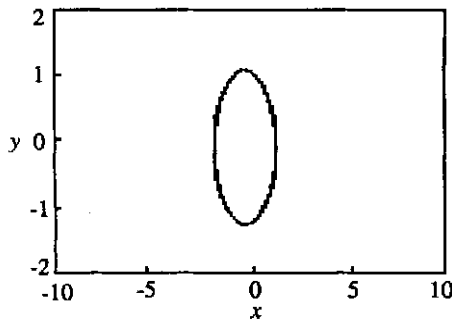


图 3 进入稳态后稳定的周期 1 运动

需要指出的是, 理论计算与数值仿真存在小的误差, 这是由 Melnikov 方法本身的缺陷造成的<sup>[5]</sup>。但从总体上看, 上述 Melnikov 分析已经很好地解释了延迟反馈引导扰动摆从混沌转为周期解的机理。

### 2.3 用 Melnikov 方法分析次谐的存在性

混沌破坏后, 受控系统将产生低周期次谐轨道, 下面分析次谐轨道的存在性。关于 O 型周期轨道  $\Gamma^i(k)$ , 对于任何互素正整数  $m$  和  $n$ , 存在唯一的  $k_m^n$  ( $0, 1$ ), 使得

$$T(k_m^n) = 4K(k_m^n) = \frac{m}{n}T = \frac{2\pi m}{\omega}$$

计算该次谐的 Melnikov 函数, 得到

$$M_i^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT} y_i(t, k) [-\mu x_i(t, k) + \mu b + a \sin(t + t_0) + P y_i(t - \tau, k) - P y_i(t, k)] dt = 2 \arcsin(\operatorname{sn}(4nK(k))) \mu b + 8\pi a k \operatorname{sech}(\alpha K(k)) \sin \alpha \omega_0 + P \Psi_i(\tau) - P \cdot 4(4nK(k) - 4nK(k)k^2) \quad (12)$$

其中

$$\Psi_i(\tau) = \int_0^{mT} y_i(t, k) y_i(t - \tau, k) dt$$

$$k = \sqrt{1 - k^2}, \quad K(k) = K(k)$$

$E(k)$  为第 2 类完全椭圆积分。关于 R 型周期轨道  $\Gamma^i(k)$ , 对于任一互质正整数  $m$  和  $n$ , 同样存在唯一的  $k_m^n$  ( $0, 1$ ), 使得

$$T^i(k_m^n) = 2k_m^n K(k_m^n) = \frac{m}{n}T = \frac{2\pi m}{\omega}$$

计算该次谐的 Melnikov 函数, 得到

$$M_i^{m/n}(t_0) = 2 \arcsin(\operatorname{sn}(2nK(k))) \mu b + 4\pi a \operatorname{sech}(\alpha K(k)) \sin \alpha \omega_0 + P \Psi_i(\tau) - P \cdot 4(E(k) - k^2 K(k)) / \pi \quad (13)$$

其中

$$\Psi_i(\tau) = \int_0^{mT} y_i(t, k) y_i(t - \tau, k) dt$$

本文着重考虑周期 1 解。当  $m = n = 1$  时, 对于振动型的周期 1 轨道,  $k^i = 9.355 \times 10^{-6}$ , 由式 (12) 算得振动型周期 1 轨道的 Melnikov 函数

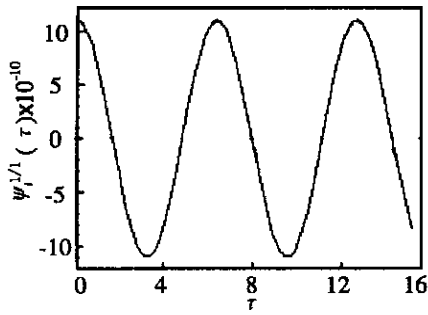
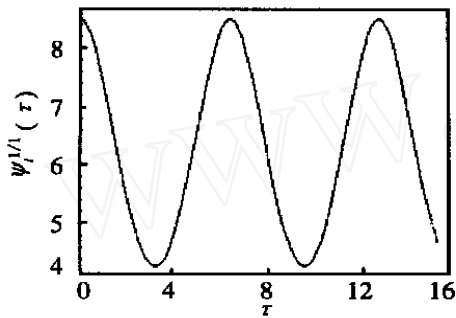
$$M_i^{1/1}(t_0) = 0 + 7.768 \times 10^{-10} \sin \alpha \omega_0 + P \Psi_i(\tau) - 2.197 \times 10^{-9} P \quad (14)$$

对于旋转型的周期 1 轨道,  $k^i = 0.9740$ , 由式 (13) 算得振动型周期 1 轨道的 Melnikov 函数

$$M_i^{1/1}(t_0) = 0 + 4.743 \sin \alpha \omega_0 + P \Psi_i(\tau) - 1.108 P \quad (15)$$

图 4 给出了周期 1 轨道的  $\Psi_i(\tau)$  和  $\Psi_i(\tau)$  的曲线。图中  $P = 0.05, \tau = 4$ 。综合式 (14) 和 (15), 振动型的周期 1 轨道和旋转型的周期 1 轨道是可以存在的。但在数值仿真中, 系统受控后只有振动型的周期 1 轨道出现, 而没有旋转型的周期 1 轨道, 这说明振动型的周期 1 轨道可能是稳定的, 而旋转型的周期 1 轨道可能是不稳定的。其稳定性分析相当复杂, 我们将另文给出。由系统受控后状态变量  $y$  的运行曲线 (略) 可以观察到, 进入稳态后其周期约为  $T^i(k_m^n) = 2\pi$ , 这是振动型的周期 1 轨道。

值得指出的是, 对于一类施加延迟反馈控制后

(a)  $\Psi_1^{(1)}(\tau)$  曲线(b)  $\Psi_1^{(1)}(\tau)$  曲线图4  $\Psi_1^{(1)}(\tau)$  和  $\Psi_1^{(1)}(\tau)$  曲线

受扰的平面 Hamilton 系统, 上述对系统 (2) 这一特例进行 Melnikov 的分析过程具有一般性。在此不作推广, 可参阅文献 [7]。总之, 在一类受扰的平面 Hamilton 系统中, 经 Melnikov 分析发现, 延迟反馈本质上可能仅仅是一作用明显的扰动项。

### 3 结 论

对于控制混沌系统到低周期解, 延迟反馈是一种简单、实用而有效的方法, 并已广泛应用于各类系统。尽管一些文献分析了延迟反馈控制的机理, 得到了较好的结果, 但条件比较强, 结果也不十分完整。

我们应用 Melnikov 方法, 研究一个典型的受扰的平面 Hamilton 系统混沌运动的延迟反馈控制机理, 得到一些较为完整的理论结果, 主要结论如下:

1) 适当的延迟反馈锁定了系统的混沌运动, 延迟反馈产生一作用明显的扰动项, 使得稳定流形和不稳定流形不再横截相交, 从而达到控制混沌的目的。

2) 与以往的结论不同, 在本文延迟反馈引导混沌系统到周期解中, 延迟时间与混沌吸引子内的 UPO 周期无关, 不必是 UPO 周期的整数倍。

3) 与文献 [4] 研究的自治系统不同, 我们讨论的是非自治系统, 延迟反馈矩阵是奇异的情况, 因此结论也有很大的差异。

### 参考文献 (References):

- [1] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback[J]. *Phys Lett A*, 1992, 170(6): 421-428
- [2] Nakajima H. On analytical properties of delayed feedback control of chaos[J]. *Phys Lett A*, 1997, 232(3, 4): 207-210
- [3] Just W, Bernard T, Ostheimer M, et al. Mechanism of time-delayed feedback control[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 78(2): 203-206
- [4] Chen G, Yu X. On time-delayed feedback control of chaotic systems[J]. *IEEE Trans on Circ & Syst - I*, 1999, 46(6): 767-772
- [5] Alvarez J, Verduco F. *Chaos and Bifurcation in Feedback Control Systems*[M]. New York: Springer, 1999
- [6] 刘曾荣. 混沌的微扰判据[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994
- [7] Cai C, Xu Z, Xu W, et al. Notch filter feedback control in a class of chaotic systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 695-701

(上接第 456 页)

- [3] Ehsani M, Husain I, Kulkarni A B. Elimination of discrete position sensor and current sensor in switched reluctance motor drives[J]. *IEEE Trans on Ind Appl*, 1992, 28(1): 128-134
- [4] Aarnley P P, Hill R J, Hooper C W. Detection of rotor position in stepping and switched reluctance motors by monitoring of current waveforms[J]. *IEEE Trans*

*on Ind Electr*, 1985, 32(3): 215-222

- [5] Lumsdaine A, Lang J H. State observers for variable-reluctance motors[J]. *IEEE Trans on Ind Electr*, 1990, 37(2): 133-142
- [6] Gabriel L G, Kjaer P C, Miller T J E. A new sensorless method for switched reluctance motor drives[J]. *IEEE Trans on Ind Appl*, 1998, 34(4): 832-840