

文章编号: 1001-0920(2002)04-0461-04

# 基于特征结构配置和 $H_\infty$ 滤波器的 $H_\infty$ 鲁棒控制器设计

杜海平, 嵇绍岭, 史习智, 张亮

(上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030)

**摘要:** 提出一种基于特征结构配置和  $H_\infty$ -滤波器的  $H_\infty$ -鲁棒控制器设计方法。首先根据系统时域动态性能要求, 采用特征结构配置方法设计出合适的状态反馈增益; 然后设计  $H_\infty$ -滤波器并进行状态估计; 最后加入适当的权函数构成广义对象, 并将其构造成反馈形式联接的标准的  $H_\infty$ -鲁棒控制器设计问题。该方法不仅可实现系统时域动态响应特性, 而且能保证系统的频域性能指标及鲁棒稳定性。通过对悬臂梁振动控制的数值仿真, 进一步验证了该方法的有效性。

**关键词:** 特征结构配置;  $H_\infty$ -滤波器;  $H_\infty$ -鲁棒控制; 柔性结构; 振动控制

中图分类号: TP 13

文献标识码: A

## Eigenstructure assignment and $H_\infty$ filter-based robust $H_\infty$ control design

DU Hai-ping, JI Shao-ling, SHI Xi-zhi, ZHANG Liang

(The State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise,

Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** A new eigenstructure assignment and  $H_\infty$  filter-based robust  $H_\infty$  control design approach is presented. Firstly, an appropriate state feedback gain is designed according to the system dynamic response requirement in time domain by using eigenstructure assignment. Then, a  $H_\infty$  filter is constructed to estimate the state. At last, appropriate weighting functions are added to construct the generalized plant and transform to a standard  $H_\infty$  control design problem based on feedback connection. The simulation of vibration control for a cantilever beam shows the effectiveness of the approach.

**Key words:** eigenstructure assignment;  $H_\infty$  filter;  $H_\infty$  control; flexible structure; vibration control

## 1 引 言

$H_\infty$  控制理论是一种鲁棒控制理论<sup>[1]</sup>, 它在频域进行控制器设计时考虑了系统不确定性的影响, 并通过某些性能指标的无穷范数优化而获得具有鲁

棒性能的控制器的。但是  $H_\infty$  控制理论在设计控制器时, 并没有考虑系统时域性能, 而许多基于时域性能指标进行控制器设计的方法, 如  $H_2$  方法、特征结构配置方法等, 不能直接满足系统频域设计指标和鲁

收稿日期: 2001-02-03; 修回日期: 2001-05-29

基金项目: 国防科技重点实验室基金项目(JS52.4.3)

作者简介: 杜海平(1968—), 男, 河北定州人, 副教授, 博士, 从事鲁棒控制、信号处理等研究; 史习智(1936—), 男, 浙江绍兴人, 教授, 博士生导师, 从事信号处理、模式识别等研究。

棒稳定性的要求。为此,许多文献提出了将时域和频域性能指标进行混合优化的控制器设计方法,以改进这一不足。例如混合  $H_2/H_\infty$  方法<sup>[2]</sup>,直接将特征结构配置在时域设计中的性能指标与  $H_\infty$  控制在频域设计中的性能指标相结合,并进行参数优化的方法<sup>[3]</sup>等。这些方法在设计上具有系统性,并且容易实现两种性能指标的折衷,但在优化问题上则依赖于优化算法的选择。

本文基于特征结构配置和  $H_\infty$  滤波器,提出一种更为直观并能同时满足时域、频域性能和鲁棒稳定性要求的  $H_\infty$  鲁棒控制器设计方法。该方法通过特征结构配置实现闭环系统的时域动态特性,通过  $H_\infty$  滤波器完成系统的状态估计,通过权函数的选择和标准  $H_\infty$  控制器的实现保证闭环系统频域性能指标和鲁棒稳定性。由于特征结构配置可在时域内很好地实现对系统任意模态阻尼比的设计,而权函数的合适选择又能充分反映模型的不确定性,因此本文方法对于解决柔性结构振动控制中的“溢出”问题更为有效。

## 2 特征结构配置和 $H_\infty$ 滤波器

### 2.1 特征结构配置

对于线性时不变系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

其中,  $x \in R^{n \times 1}$  为状态向量,  $u \in R^{m \times 1}$  为控制输入向量,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ 。特征结构配置就是寻找一状态反馈增益阵  $L$  ( $L \in R^{m \times n}$ ),使得闭环系统矩阵  $A + BL$  的特征值及相应的特征向量,满足理想的特征值及相应的特征向量要求。求解  $L$  的方法有参数优化法、投影法等<sup>[4]</sup>。

### 2.2 $H_\infty$ 滤波器

$H_\infty$  滤波器的一般意义是指在干扰作用下,设计一滤波器去估计系统的输出,使得从干扰输入到估计误差的映射在  $H_\infty$  范数意义下为最小或小于某一设定的性能指标  $\gamma$ 。干扰定义为  $L_2$  范数有界信号,而并不限于高斯信号,因此  $H_\infty$  滤波器具有更广泛的含义。

设一线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w \\ y = C_2 x + D_{21} w \\ z = C_1 x \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $w \in L_2 = \left\{ w(t) \mid \int_0^\infty |w(t)|^2 dt < \infty \right\}$  为  $L_2$  范数有界干扰信号,  $A, B_1, C_1, C_2, D_{21}$  为相应维数的常数矩阵。

$H_\infty$  滤波问题就是对于给定性能指标  $\gamma$ ,寻找滤波器  $F(s)$ ,满足

$$J = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z - \hat{z}\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$$

其中  $\hat{z} = F(s)y$ 。定义控制输出(评价信号)  $z_\Delta = z - \hat{z}$ ,则系统广义对象的状态空间实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & I \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

当广义对象满足一定条件时,存在滤波器  $F(s)$ <sup>[1]</sup>

$$F(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_2 C_1^\top - Y C_2^\top C_2 & Y C_2^\top \\ \hline C_1 & 0 \end{array} \right] \quad (4)$$

其中,  $Y$  是代数 Riccati 方程  $Y A^\top + A Y - Y (C_2^\top C_2 - Y^\top C_1^\top C_1) Y + B_1 B_1^\top = 0$  的半正定解。滤波器的输出是系统状态向量估计值的组合,即  $\hat{z} = C_1 \hat{x}$ ,  $\hat{x}$  是滤波器  $F(s)$  的状态向量。

## 3 基于特征结构配置和 $H_\infty$ 滤波器的 $H_\infty$ 鲁棒控制器设计

由于特征结构配置能在时域中按设计指标给出合适的状态反馈增益,  $H_\infty$  滤波器能在一定的性能指标约束下实现对系统状态的估计,因此将二者结合起来;同时对干扰输入信号取合适的权函数,以反映频域性能指标和模型的不确定性;最后转换为标准的  $H_\infty$  鲁棒控制器设计过程,便能较好地解决时域、频域性能指标及鲁棒稳定性的综合设计问题。具体设计过程是:首先按照时域性能要求,采用特征结构配置方法设计合适的状态反馈增益阵  $L$ ;然后按  $H_\infty$  滤波器的要求定义控制输出信号(评价信号)为  $z_\Delta = z - \hat{z} = Lx - u$ ,  $x$  为被控系统的状态向量,  $u$  为控制器的输出信号,并设计一合适的传递函数  $G_F(s)$ ,使得  $z_\Delta = G_F(s)u$ ;最后加入能反映频域性能要求和模型不确定性的权函数  $W_1(s)$  和  $W_2(s)$ ,构造出广义对象,并采用合适的方式与控制器联接,通过求解  $H_\infty$  标准问题,获得满足时域、频域性能指标及鲁棒稳定性的最佳控制器。

在  $H_\infty$  控制设计中,广义对象与控制器之间可有串联和反馈两种不同的联接形式,它们对问题的求解会有不同的影响<sup>[5]</sup>。本文采用反馈形式构造这种广义对象与控制器的联接方式,在加入包含理想状态反馈增益的传递函数  $G_F(s)$ ,输入和输出干扰信号权函数  $W_1(s)$  和  $W_2(s)$  后,形成标准的  $H_\infty$  控

制结构, 如图 1 所示。

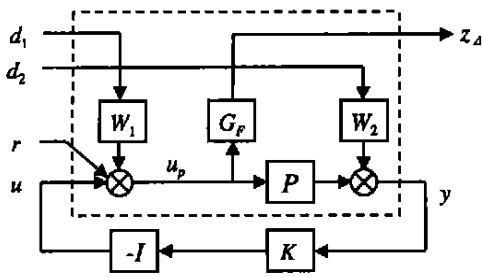


图 1 基于反馈形式联接广义对象和控制器的标准  $H_\infty$  控制结构

图 1 中,  $P$  为被控对象的名义模型,  $P(s) := \{A_p, B_p, C_p, D_p\}$ ,  $G_F(s) := \{A_p, B_p, L, -I\}$ , 为控制输出的加权函数;  $d_1$  和  $d_2$  分别为被控对象的输入和输出干扰信号,  $r$  为参考输入信号,  $z_\Delta$  为控制输出,  $u$  为控制信号,  $y$  为测量输出(由输入信号  $d_1, d_2, r$  到输出信号  $z_\Delta, y$  的传递函数(虚框所示)称为广义对象);  $K$  为控制器,  $W_1$  和  $W_2$  为干扰信号权函数, 其中  $W_1(s) := \{A_{w_1}, B_{w_1}, C_{w_1}, D_{w_1}\}$ ,  $W_2(s) := \{A_{w_2}, B_{w_2}, C_{w_2}, D_{w_2}\}$ 。由图 1 及  $G_F$  的定义知  $z_\Delta = z - \hat{z} = Lx_p - u_p$ ,  $x_p$  为  $P$  的状态向量,  $L$  为状态反馈增益(由特征结构配置确定)。因此,  $G_F$  实际构造了  $H_\infty$  滤波器的估计误差输出模型。

根据图 1 可得到广义对象的状态空间实现为

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p C_{w_1} & 0 & B_p D_{w_1} & 0 & B_p & -B_p \\ 0 & A_{w_1} & 0 & B_{w_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{w_2} & 0 & B_{w_2} & 0 & 0 \\ L & C_{w_1} & 0 & D_{w_1} & 0 & I & -I \\ C_p & D_p C_{w_1} & C_{w_2} & D_p D_{w_1} & D_{w_2} & D_p & -D_p \end{bmatrix} \quad (5)$$

设  $w = [d_1 \ d_2]$ , 则从干扰输入  $w$  到控制输出  $z_\Delta$  的传递函数为

$$T_{z_\Delta w}(s) = [G_F(I + KP)^{-1}W_1 \ G_F(I + KP)^{-1}KW_2] \quad (6)$$

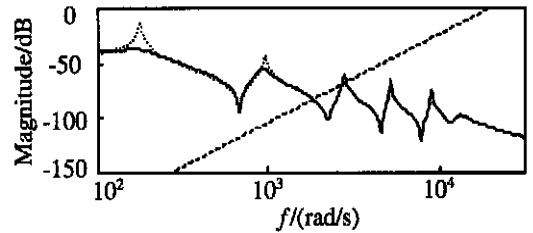
从式(6)可以看出,  $W_1$  实际上是对输入灵敏度  $(I + KP)^{-1}$  的加权,  $W_2$  是对控制器的加权, 它反映了模型加型不确定性的影响, 并弥补了特征结构配置方法对控制能量没有限制的缺陷。因此上述问题可看作修改的混合灵敏度问题。

$H_\infty$  标准设计问题就是对给定的广义对象(5), 判定是否存在输出反馈控制器  $K$ , 使得闭环系统稳定且满足  $T_{z_\Delta w} < \gamma$ 。对于上述问题, 在满足一定条件下, 可通过求解代数 Riccati 方程或线性矩阵不等式获得理想的控制器。

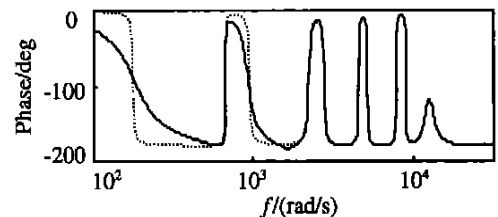
### 4 应用算例

柔性结构振动主动控制在航空、航天等许多工程领域都有重要的研究与应用价值。由于建模误差及控制器带宽的限制, 致使在控制中容易产生控制和观测溢出问题。为验证本文方法解决溢出问题的有效性, 对悬臂梁的振动控制问题进行数值仿真。采用压电材料作为作动器和传感器, 并用有限元法建立悬臂梁输入输出模型, 初步降阶后得到形如式(1)的 13 阶状态空间方程。为抑制溢出问题, 要求控制器只控制前两阶模态, 并使第 1 阶模态阻尼比不小于 0.3, 第 2 阶模态阻尼比不小于 0.1, 而其它模态的阻尼比及相位等均保持不变。

根据本文方法的实现步骤, 首先, 通过特征结构配置获得满足模态阻尼比要求的状态反馈增益  $L$ ; 然后, 选择权函数  $W_1(s)$  为一常数, 以保证广义对象的控制输出能较好地反映状态估计误差, 选择  $W_2(s)$  为一 4 阶低通系统, 以实现较窄的过渡频带, 使其在被控低阶模态和高阶模态相邻很近时, 也能充分包络高阶模态的不确定性而不影响低阶模态;



(a) 开环与闭环系统传递函数



(b)  $W_2^{-1}(s)$

图 2 应用算例的 Bode 图

最后,构造形如式(6)的广义对象,并通过求解标准的  $H$  问题获得控制器  $K$ 。

开环与闭环系统传递函数及  $W_2^{-1}(s)$  的 Bode 图如图 2 所示。其中,实线为闭环系统,点线为开环系统,虚线为  $W_2^{-1}(s)$ 。可以看出,控制器的作用使得闭环系统的第 1 阶和第 2 阶模态的阻尼比明显增大,而其它阶的模态没有变化。系统受到脉冲干扰的时域响应波形如图 3 所示,可见闭环系统在干扰作用下,时间响应的收敛速度明显快于开环系统。

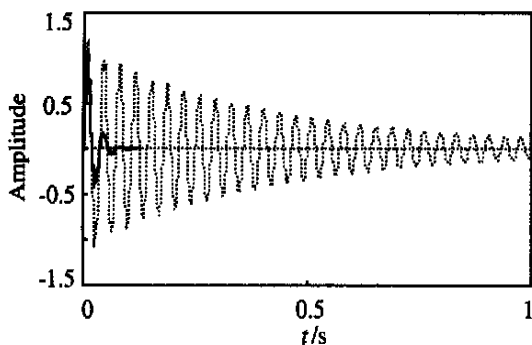


图 3 脉冲干扰的时域响应波形

## 5 结 论

本文基于特征结构配置和  $H$  滤波器构造了合适的广义对象,采用反馈形式联接广义对象和控制器,并转换成标准的  $H$  鲁棒控制器设计问题,较好

地实现了时域指标与频域指标的综合以及鲁棒稳定性的要求。该设计方法比混合性能指标并进行参数优化的方法在形式上更为直观,比基于混合灵敏度的  $H$  控制设计方法在权函数的选择上限制少,并且易于实现。由于时域性能指标在整个设计过程都能得到保证,而  $H$  滤波器是在意义更为广泛的干扰作用下对系统状态进行的最优估计,因此采用本文方法解决结构振动控制中的溢出问题更为有效。

## 参考文献(References):

- [1] Zhou K, Doyle J C. *Essentials of Robust Control* [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [2] 杜耀武,史习智. 结构振动的  $H_2/H$  混合最优控制[J]. 振动工程学报, 1999, 12: 103-108.  
(Du Yaowu, Shi Xizhi. Mixed  $H_2/H$  optimal control for structure vibration[J]. *J of Vibrat Eng*, 1999, 12: 103-108.)
- [3] Liu G P, Duan D R, Patton R J. Mixed time and frequency-domain robust eigenstructure assignment [J]. *Int J Syst Sci*, 2000, 31: 63-71.
- [4] Liu G P, Patton R J. *Eigenstructure Assignment for Control System Design* [M]. England: John Wiley & Sons, 1998.
- [5] George K, Lee J G, Lee B. Generalized plants for  $H$  robust controllers design[J]. *J Guidance*, 1999, 22: 367-369.

(上接第 390 页)

- [40] Cliff D, Harvey I, Husbands P. Explorations in evolutionary robotics [J]. *Adaptive Behavior*, 1993, 2(1): 73-110.
- [41] 刘娟,蔡自兴,涂春鸣. 进化机器人学研究进展[J]. 控制理论及应用, 2002, 19(4).  
(Liu Juan, Cai Zixing, Tu Chunming. A survey on evolutionary robotics [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(4).)
- [42] Oded Maron, Apama Lakshmi Ratan. Multiple-instance learning for natural scene classification [A]. *ICML-98* [C]. San Mateo: Morgan Kaufmann, 1998. 341-349.
- [43] Goldman S A, Kwek S S, Scoot S D. Agnostic learn-

- ing of geometric patterns [J]. *Computer & System Sciences*, 2001, 6(1): 123-151.
- [44] Scholkopf B. Support vector learning [D]. Berlin: Informatik der Technischen Universität, 1997.
- [45] Pontil M, Verri A. Support vector machines for 3D object recognition [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 1998, 20(6): 637-646.
- [46] 张铃,张钊. 支持向量机理论与基于规划的神经网络学习算法[J]. 计算机学报, 2001, 24(2): 113-118.  
(Zhang Ling, Zhang Ba. The theory of SVM and programming based learning algorithms in neural networks [J]. *J of Computers*, 2001, 24(2): 113-118.)